Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 1, 21. April 2005

Gerhard Jäger

Sätze und Aussagen

[Beckermann 2003, Kap. 3]

(1) Schon wieder Verona Feldbusch!

(2) Hat die Vorlesung schon angefangen?

(3) Würden Sie mir bitte zeigen, wie ich zur Haltestelle der Linie 4 komme.

(4) Vor einem Jahr waren an der Universität Bielefeld 891 Studierende für das Fach Philosophie eingeschrieben.

- Grammatisch gesehen sind das alles Sätze
- logisch interessante Sätze müssen **wahrheitswertfähig** sein
- Frage: Auf welchen Beispielsatz trifft das zu?

Sätze und Aussagen

- Wahrheitswert von (4) hängt davon ab, wann er geäußert wird
- ähnlich gelagerte Beispiele:

(5) Karl der Große wurde *hier* im Jahre 800 n. Chr. zum Kaiser gekrönt.

(6) *Heute* ist Dienstag.

(7) *Dort* läuft der Hans.

(8) Das Fenster ist *links von* der Tür.

Sätze und Aussagen

- Wahrheitswert diese Sätze hängt von **Äußerungssituation** ab
- i.a.W.: je nach Äußerungssituation drücken diese Sätze verschiedene **Aussagen** aus
- verantwortlich dafür: **deiktische** bzw. **indexikalisch Ausdrücke** (*hier, dort, links, rechts, jetzt, morgen, im vergangenen Jahr, ich, du, ...*)

Sätze und Aussagen

- Aussagesätze sind Sätze, die prinzipiell entweder wahr oder falsch sind.
- Die Aussagen- und Prädikatenlogik beschäftigt sich nur mit Aussagesätzen, deren Wahrheit nicht von ihrer Äußerungsituation abhängt.

Sätze und Aussagen

Welche der folgenden Sätze sind Sätze im Sinne der Aussagenlogik?

(9) Die Zugspitze ist der höchste Berg Deutschlands.

(10) Ich habe dir heute und hier seinen Brief gezeigt.

(11) Gib mir mal das Salz!

(12) Hast du gut geschlafen?

(13) Wie schön!

Aussagenlogik: Satzverbindungen

- sprachliche Mittel, mit denen man aus Sätzen neue Sätze bilden kann
- Beispiele:

keinesfalls; und; aber; Peter weiß, dass; oder; wenn ... dann;

genau dann wenn; vielleicht

Negation

- Wenn eine Aussage wahr ist, ist ihre Negation falsch (und umgedreht).
- Aussage

(14) Peter ist in Berlin.

- Mögliche Ausdrücke für die Negation:

(15) a. Peter ist nicht in Berlin.
b. Keineswegs ist Peter in Berlin.
c. Es stimmt nicht, dass Peter in Berlin ist.
d. Es ist nicht der Fall, dass Peter in Berlin ist.
e. Peter ist mitnichten in Berlin.

- Schematisch:
  - Aussage: φ
  - Negation: $\neg\varphi$

Negation

- Wahrheitswerte: „wahr“ und „falsch“
- schematisch: 1 (für „wahr“) und 0 (für „falsch“)
- **Wahrheitswerttafel** für die Negation:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Konjunktion

- Konjunktion: Verknüpfung von zwei Aussagen
- Konjunktion ist genau dann wahr, wenn beide Konjunkte wahr sind
- z.B.: Aussagen:

(16) a. Fritz schläft.
b. Fritz schnarcht.

- Konjunktion:

(17) a. Fritz schläft und Fritz schnarcht.
b. Fritz schläft und schnarcht.
c. Fritz schläft; auch schnarcht er.
d. Fritz schläft sowie Fritz schnarcht.
e. ...

Konjunktion

- Schematisch:
  - Aussagen: φ, ψ
  - Konjunktion: $\varphi \wedge \psi$
- Wahrheitswerttafel:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunktion

(bei manchen Autoren „Alternative“)

- Disjunktion: Verknüpfung von zwei Aussagen
- ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Komponenten wahr ist
- z.B.:

(18) a. Es regnet.
b. Es ist dunkel.

- Disjunktion:

(19) Es regnet oder es ist dunkel.

Disjunktion

- Schematisch:
  - Aussagen: φ, ψ
  - Disjunktion: $\varphi \vee \psi$
- Wahrheitswerttafel:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Inklusives und exklusives *oder*

- Disjunktion entspricht **inklusivem „oder“**
- gemeint ist

(20) a. Es regnet und/oder es ist dunkel.
     b. Es regnet oder es ist dunkel oder beides.

- daneben gibt es auch das **exklusive „oder“**
- „oder“ kann im Deutschen beides bedeuten
- Beispiel:

(21) a. Entweder wir gehen ins Kino oder in den Zoo.
     b. Wir gehen ins Kino oder in den Zoo, aber nicht beides.

Kontravalenz

- Exklusives „oder" wird durch anderen aussagenlogischen Operator erfasst: **Kontravalenz**
- Schematisch: $\varphi \infty \psi$
- Wahrheitswerttafel:

φ	ψ	$\varphi \infty \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- Wenn nicht anders gesagt, wird „oder" künftig im Sinne der Disjunktion verwendet.

Implikation

- Aussagen: φ, ψ
- zusammengesetzte Aussage: $\varphi \to \psi$
- gelesen als: „φ **impliziert** ψ“
- Wahrheitswerttafel:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikation

- Verwandtschaft zur Konditionalkonstruktion

  Wenn ..., dann ...

- Für alle vier Wahrheitswertkombinationen lassen sich passende Beispiele mit Konditionasätzen bilden:
  1. (wahr – wahr): *Wenn 2+2=4, dann 2+3=5.* (wahr)
  2. (wahr – falsch): *Wenn 2+2=4, dann 2+3=4.* (falsch)
  3. (falsch – wahr): *Wenn 1=2 und 2=1, dann 3=3.* (wahr)
  4. (falsch – falsch): *Wenn 1=2, dann 2=3.* (wahr)

Implikation

Bertrand Russell, in a lecture on logic, mentioned that in the sense of material implication, a false proposition implies any proposition. A student raised his hand and said „In that case, given that 1 = 0, prove that you are the Pope“. Russell immediately replied, „Add 1 to both sides of the equation: then we have 2 = 1. The set containing just me and the Pope has 2 members. But 2 = 1, so it has only 1 member; therefore, I am the Pope.“

Implikation

- Wenn zwischen φ und ψ keine innere Beziehung besteht, kann eine Implikation wahr sein, der entsprechende Konditionalsatz aber zumindest fraglich.

(22) a. *Wenn 1 = 0, dann ist Bertrand Russell der Papst.* (unklar, ob wahr oder falsch)
b. *1 = 0 impliziert, dass Bertrand Russell der Papst ist.* (wahr)

(23) a. *Wenn der Mond aus grünem Käse ist, dann ist er aus Schokolade.* (eher falsch)
b. *Der Mond ist aus grünem Käse impliziert, dass er aus Schokolade ist.* (wahr)

Äquivalenz

- Aussagen: φ, ψ
- zusammengesetzte Ausage: $\varphi \leftrightarrow \psi$
- gelesen als „φ **ist äquivalent zu** ψ"
- Wahrheitswerttafel

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Äquivalenz

- verwandt zu den natürlichsprachlichen Konstruktionen
  - φ *wenn und nur dann wenn* ψ
  - φ *genau dann wenn* ψ
- ähnliche Einschränkungen wie für die Gleichsetzung von *impliziert* mit *wenn ..., dann ...*

Syntax der Aussagenlogik

Eine aussagenlogische Sprache besteht zunächst aus einer (üblicherweise unendlichen) Menge von atomaren Sätzen. Das sind Sätze, die selbst nicht aus Sätzen bestehen.

- *Peter schläft* ist ein atomarer Satz.
- *Peter lächelt, wenn er schläft* ist kein atomarer Satz.

Üblicherweise verwenden wir die Symbole

$$p, q, r, p_1, q_5, r', r'', ..$$

als atomare Sätze („Aussagenvariable“).

Syntax der Aussagenlogik

Definition 1 *Sei eine Menge $\mathcal{A}$ von atomaren Sätzen.*

1. *Jeder Satz in $\mathcal{A}$ ist eine Formel in $L(\mathcal{A})$.*
2. *Wenn ψ eine Formel in $L(\mathcal{A})$ ist, dann ist $\neg\psi$ auch Formel in $L(\mathcal{A})$.*
3. *Wenn φ und ψ Formeln in $L(\mathcal{A})$ sind, dann sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ebenfalls Formeln in $L(\mathcal{A})$.*
4. *Davon abgesehen gibt es keine anderen Formeln in $L(\mathcal{A})$.*

Syntax der Aussagenlogik

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln einer aussagenlogischen Sprache?

$\neg(\neg p \vee q)$	$p \vee (q)$
$\neg(q)$	$(p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_2)))$
$(p \longrightarrow ((p \longrightarrow q)))$	$((p \longrightarrow p) \longrightarrow (q \longrightarrow q))$
$((p_{28} \longrightarrow p_3) \longrightarrow p_4)$	$(p \longrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow q)$
$(p \vee (q \vee r))$	$(p \vee q \vee r)$
$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$(p \vee p)$

Syntax der Aussagenlogik

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln einer aussagenlogischen Sprache?

$\neg(\neg p \vee q)$	$\cancel{p \vee (q)}$
$\neg(q)$	$(p_2 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_2)))$
$(p \rightarrow ((p \rightarrow q)))$	$((p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q))$
$((p_{28} \rightarrow p_3) \rightarrow p_4)$	$(p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q)$
$(p \vee (q \vee r))$	$(p \vee q \vee r)$
$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$(p \vee p)$

Syntax der Aussagenlogik

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln einer aussagenlogischen Sprache?

$\neg(\neg p \vee q)$	$\cancel{p \vee (q)}$
$\cancel{\neg(q)}$	$(p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_2)))$
$(p \longrightarrow ((p \longrightarrow q)))$	$((p \longrightarrow p) \longrightarrow (q \longrightarrow q))$
$((p_{28} \longrightarrow p_3) \longrightarrow p_4)$	$(p \longrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow q)$
$(p \vee (q \vee r))$	$(p \vee q \vee r)$
$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$(p \vee p)$

Syntax der Aussagenlogik

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln einer aussagenlogischen Sprache?

$\neg(\neg p \vee q)$	$\cancel{p \vee (q)}$
$\cancel{\neg(q)}$	$(p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_2)))$
$\cancel{(p \longrightarrow ((p \longrightarrow q)))}$	$((p \longrightarrow p) \longrightarrow (q \longrightarrow q))$
$((p_{28} \longrightarrow p_3) \longrightarrow p_4)$	$(p \longrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow q)$
$(p \vee (q \vee r))$	$(p \vee q \vee r)$
$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$(p \vee p)$

Syntax der Aussagenlogik

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln einer aussagenlogischen Sprache?

$\neg(\neg p \vee q)$	$\cancel{p \vee (q)}$
$\cancel{\neg(q)}$	$(p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_2)))$
$\cancel{(p \longrightarrow ((p \longrightarrow q))))}$	$((p \longrightarrow p) \longrightarrow (q \longrightarrow q))$
$((p_{28} \longrightarrow p_3) \longrightarrow p_4)$	$\cancel{(p \longrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow q)}$
$(p \vee (q \vee r))$	$(p \vee q \vee r)$
$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$(p \vee p)$

Syntax der Aussagenlogik

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln einer aussagenlogischen Sprache?

$\neg(\neg p \vee q)$	$\cancel{p \vee (q)}$
$\cancel{\neg(q)}$	$(p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_2)))$
$\cancel{(p \longrightarrow ((p \longrightarrow q))))}$	$((p \longrightarrow p) \longrightarrow (q \longrightarrow q))$
$((p_{28} \longrightarrow p_3) \longrightarrow p_4)$	$\cancel{(p \longrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow q)}$
$(p \vee (q \vee r))$	$\cancel{(p \vee q \vee r)}$
$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$(p \vee p)$

Klammerkonventionen

- redundante Klammern dürfen weggelassen werden
- Konventionen:
  - äußere Klammern fallen weg
  - $\neg$ bindet am stärksten, dann kommen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (in dieser Reihenfolge)
  - Operatoren sind **rechtssassoziativ:**

$$p \rightarrow q \rightarrow r = (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

Semantik der Aussagenlogik

- **Bewertungsfunktion V:** Funktion, die jeder Formel einer aussagenlogischen Sprache einen Wahrheitswert zuweist
- zulässige Bewertungsfunktion muss mit Interpretation der aussagenlogischen Operatoren übereinstimmen:

Semantik der Aussagenlogik

Definition 2 *Eine Funktion V von den Formeln einer aussagenlogischen Sprache $L(\mathcal{A})$ in die Menge der Wahrheitswerte $\{0, 1\}$ ist eine* ***Bewertungsfunktion*** *gdw. für alle Formeln φ und ψ gilt:*

1. $V(\neg\varphi) = 1 - V(\varphi)$
2. $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \times V(\psi)$
3. $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) + V(\psi) - V(\varphi) \times V(\psi)$
4. $V(\varphi \rightarrow \psi) = 1 - V(\varphi) \times (1 - V(\psi))$
5. $V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - (V(\varphi) - V(\psi))^2$

Semantik der Aussagenlogik

- jedem Operator entspricht eine Funktion über Wahrheitswerte
- arithmetische Definition ist äquivalent zu den weiter oben angegebenen Wahrheitswerttafeln
- Wahrheitswert von komplexer Formel φ unter V ist durch die Wahrheitswerte der in φ vorkommenden atomaren Sätze unter V eindeutig bestimmt

Semantik der Aussagenlogik

- um **Wahrheitsbedingungen** einer komplexen Formel φ zu bestimmen
  - muss man nicht alle denkbaren Bewertungsfunktionen betrachten, sondern
  - nur alle möglichen Verteilungen von Wahrheitswerten auf die in φ vorkommenden Atome betrachten, also
  - bei n atomaren Formeln 2^n Wahrheitswert-Verteilungen

Semantik der Aussagenlogik

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V_1	1	1				
V_2	1	0				
V_3	0	1				
V_4	0	0				

Semantik der Aussagenlogik

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V_1	1	1	0			
V_2	1	0	0			
V_3	0	1	1			
V_4	0	0	1			

Semantik der Aussagenlogik

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V_1	1	1	0	0		
V_2	1	0	0	1		
V_3	0	1	1	0		
V_4	0	0	1	1		

Semantik der Aussagenlogik

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V_1	1	1	0	0	0	
V_2	1	0	0	1	0	
V_3	0	1	1	0	0	
V_4	0	0	1	1	1	

Semantik der Aussagenlogik

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V_1	1	1	0	0	0	1
V_2	1	0	0	1	0	1
V_3	0	1	1	0	0	1
V_4	0	0	1	1	1	0