Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 3, 12. Mai 2005

Gerhard Jäger

Logische Folgerung

Definition 6 (Folgerung) *Eine Formel φ **folgt logisch** aus einer Menge von Formeln M, formal notiert als*

$$M \Rightarrow \varphi$$

genau dann wenn für alle Bewertungsfunktionen V gilt:
Wenn für alle $\psi \in M$:

$$V(\psi) = 1$$

dann

$$V(\varphi) = 1$$

Logische Folgerung

- Wenn $M \Rightarrow \varphi$, dann spricht man auch von einem **gültigen Argument**
- M heißt **Prämissenmenge** und φ **Konklusion**
- Tautologien folgen logisch aus der leeren Menge
- Beispiele für gültige Argumente

$$
\begin{array}{rcl}
p, q & \Rightarrow & p \\
p, q & \Rightarrow & p \wedge q \\
p \wedge q & \Rightarrow & q \wedge p \\
p, q & \Rightarrow & q \vee r \\
p & \Rightarrow & q \rightarrow p \\
p, p \rightarrow q & \Rightarrow & q \\
p \rightarrow q, q \rightarrow r & \Rightarrow & p \rightarrow r
\end{array}
$$

Logische Folgerung

- bei endlichem M ist Folgerung durch Wahrheitstafel-Methode entscheidbar
- in jeder Zeile, in der jede Prämisse den Eintrag „1“ hat, muss auch die Konklusion den Eintrag „1“ haben.
- **Beispiel:** „Modus Ponens“

$$p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

Logische Folgerung

	p	q	$p \longrightarrow q$
V_1	1	1	1
V_2	1	0	0
V_3	0	1	1
V_4	0	0	1

Logische Folgerung

	p	q	$p \to q$
V_1	1	1	1
V_2	1	0	0
V_3	0	1	1
V_4	0	0	1

Nur in der ersten Zeile sind alle Prämissen wahr, und dort ist auch die Konklusion wahr.

Das Deduktionstheorem

Theorem 4 *Für beliebige Formeln* $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi$*,*

$$M, \varphi_1, \cdots, \varphi_n \Rightarrow \psi$$

genau dann wenn

$$M \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \psi$$

Beweis: Wir beweisen das Theorem via vollständiger Induktion über n.

- *Induktionsbasis* $n = 0$*:* Das Theorem gilt offensichtlich.

Das Deduktionstheorem

- *Induktionsschritt vorwärts:* Angenommen, das Theorem gilt für n. Wir müssen zeigen, dass es dann auch für $n+1$ gilt. Nehmen wir weiterhin an, dass für alle $\xi \in M$, $V(\xi) = 1$ für eine beliebige Bewertungsfunktion V. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:
  1. $V(\varphi_1) = 0$. Nach der Semantik der Implikation gilt dann $V(\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \varphi_{n+1} \to \psi) = 1$.
  2. $V(\varphi_1) = 1$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $M, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \varphi_{n+1} \to \psi$. Daher gilt auch $V(\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \varphi_{n+1} \to \psi) = 1$. Nach der Semantik der Implikation gilt daher $V(\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \varphi_{n+1} \to \psi) = 1$.

  Aus der Annahme, dass V die Prämissen verifiziert, folgt also in jedem Fall dass es auch die Konklusion verifiziert.

Das Deduktionstheorem

- *Induktionsschritt rückwärts:* Angenommen das Theorem gilt für n. Nehmen wir weiterhin an, dass $M \Rightarrow \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_{n+1} \to \psi$. Außerdem nehmen wir an, dass für alle $\xi \in M : V(\xi) = 1$, sowie $V(\varphi_i) = 1$ für $1 \leq i \leq n+1$. Nach Induktionsannahme gilt: $M, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1} \to \psi$. Also $V(\varphi_{n+1} \to \psi) = 1$. Nach der Semantik der Implikation gilt dann auch $V(\psi) = 1$.

$\dashv$

Deduktionstheorem

- Deduktionstheorem liegt der Methode des **konditionalen Beweises** zu Grunde
- Um zu beweisen, dass *Wenn* A*, dann* B logisch wahr ist (bzw. aus weiteren Hintergrundprämissen folgt), nimmt man
  - A als zusätzliche Prämisse an, und
  - beweist mit Hilfe dieser Prämisse B.

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Wahrheitstafel-Methode häufig umständlich und redundant
- Alternative: **indirekter Beweis**
- Man startet von der Annahme, dass eine Folgerung ungültig ist, und versucht, einen Widerspruch abzuleiten
- Folgerung ist ungültig, wenn für wenigstens eine Bewertungsfunktion V gilt, dass alle Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist.

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \to q \to r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \to q \to r \vee p)$ wahr sein
  - also muss p wahr sein und $q \to r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(q \to r \vee p)$ wahr sein
  - also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

  $$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(r \vee p)$ wahr sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(r \vee p)$ wahr sein
  - also müssen sowohl r als auch p falsch sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

  - keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
  - also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch
  - also muss $\neg(r \vee p)$ wahr sein
  - also müssen sowohl r als auch p falsch sein
  - **Widerspruch**
- Annahme, dass die Formel kein Theorem ist, hat zu Widerspruch geführt
- also ist die Formel ein Theorem

Die Wahrheitsbaum-Methode

- lässt sich schematisch in Baum-Form darstellen

$$
\begin{array}{lcr}
1. & \neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p) & (A) \\
2. & p & (1) \\
3. & \neg(q \rightarrow r \vee p) & (1) \\
4. & q & (3) \\
5. & \neg(r \vee p) & (3) \\
6. & \neg r & (5) \\
7. & \neg p & (5) \\
8. & \text{x} & (1,7)
\end{array}
$$

- degenerierter Baum, da nicht verzweigend
- i. Allg. können Wahrheitsbäume verzweigen

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Zeile besteht aus
  1. Zeilennummer
  2. Formel, die als wahr angenommen wird, und
  3. Zeilennummer, aus der die aktuelle Zeile abgeleitet wurde (erste Zeile ist „Annahme“ (A))
- Wenn in einem Ast
  - die Formel φ steht und oberhalb der aktuellen Zeile die Formel $\neg\varphi$, oder
  - die Formel $\neg\varphi$ und oberhalb der aktuellen Zeile die Formel φ,

  dann wird dieser Ast mit „x“ als widersprüchlich gekennzeichnet
- Wahrheitsbaum ist **geschlossen, wenn alle Äste widerspüchlich sind**

Weiteres Beispiel

1.	$\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r)$	(A)
2.	$p \rightarrow q$	(1)
3.	$\neg((q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r)$	(1)
4.	$q \rightarrow r$	(3)
5.	$\neg(p \rightarrow r)$	(3)
6.	p	(5)
7.	$\neg r$	(5)

8. $\neg p$ (2)
× $(6, 8)$

9. q (2)

10. $\neg q$ (4)
× $(9, 10)$

11. r (4)
× $(7, 11)$

Weiteres Beispiel

- alle Äste sind geschlossen
- intuitiv: Fallunterscheidungen, aber jeder Fall führt zu Widerspruch
- damit ist Annahme widerlegt, also das ursprüngliche Theorem bewiesen

Wahrheitsbaum-Kalkül

- Verfahren kann z.T. mechanisiert werden
- jede komplexe Formel führt auf genau definierte Weise zu Erweiterung des Wahrheits-Baumes

Regeln

- doppelte Negation

$$(DN) \quad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

- Konjunktion

$$(K) \quad \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ \varphi \\ \psi \end{array}$$

Regeln

- Disjunktion

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} & \varphi \vee \psi & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ \varphi & & \psi \end{array}$$

- Implikation

$$(I) \qquad \begin{array}{ccc} & \varphi \longrightarrow \psi & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ \neg\varphi & & \psi \end{array}$$

Regeln

- Äquivalenz

$$(\ddot{A}) \qquad \begin{array}{c} \varphi \leftrightarrow \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \varphi & \neg\varphi \\ \psi & \neg\psi \end{array} \end{array}$$

- Negation + Konjunktion

$$(NK) \qquad \begin{array}{c} \neg(\varphi \wedge \psi) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \neg\varphi & \neg\psi \end{array} \end{array}$$

Regeln

- Negation + Disjunktion

$$(ND) \quad \begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

- Negation + Implikation

$$(NI) \quad \begin{array}{c} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \\ \varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

Regeln

- Negation + Äquivalenz

$$(N\ddot{A}) \qquad \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \neg\varphi \\ \neg\psi & & \psi \end{array}$$

Wahrheitsbaum-Kalkül

Theorem 5 *Eine Formel φ der Aussagenlogik ist genau dann logisch wahr, wenn jeder Ast eines Wahrheitsbaums der Negation $\neg\varphi$ dieses Satzes, der nur mit Hilfe der zuvor angegebenen Regeln entwickelt wurde, mit einem „x“ geschlossen werden kann, da in ihm ein Formel sowohl in negierter als auch in nicht-negierter Form vorkommt.*

Faustregeln

- Man sollte immer zuerst versuchen, nicht verzweigende Regeln anzuwenden.
- Bei der Anwendung von verzweigenden Regeln sollte man darauf achten, dass man möglichst einen Ast sofort schließen kann.
- Die Entwicklung doppelt negierter atomarer Formeln bring in der Regel keinen Vorteil; doppelt negierte Atome sollten daher nur entwickelt werden, wenn das zum Abschluss eines Astes nötig ist.