

Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 3, 12. Mai 2005

Gerhard Jäger

Logische Folgerung

Definition 6 (Folgerung) *Eine Formel φ folgt logisch aus einer Menge von Formeln M , formal notiert als*

$$M \Rightarrow \varphi$$

*genau dann wenn für alle Bewertungsfunktionen V gilt:
Wenn für alle $\psi \in M$:*

$$V(\psi) = 1$$

dann

$$V(\varphi) = 1$$

Logische Folgerung

- Wenn $M \Rightarrow \varphi$, dann spricht man auch von einem **gültigen Argument**
- M heißt **Prämissenmenge** und φ **Konklusion**
- Tautologien folgen logisch aus der leeren Menge
- Beispiele für gültige Argumente

$$p, q \Rightarrow p$$

$$p, q \Rightarrow p \wedge q$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$$

$$p, q \Rightarrow q \vee r$$

$$p \Rightarrow q \rightarrow p$$

$$p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$$

Logische Folgerung

- bei endlichem M ist Folgerung durch Wahrheitstafel-Methode entscheidbar
- in jeder Zeile, in der jede Prämisse den Eintrag „1“ hat, muss auch die Konklusion den Eintrag „1“ haben.
- **Beispiel:** „Modus Ponens“

$$p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

Logische Folgerung

	p	q	$p \rightarrow q$
V_1	1	1	1
V_2	1	0	0
V_3	0	1	1
V_4	0	0	1

Logische Folgerung

	p	q	$p \rightarrow q$
V_1	1	1	1
V_2	1	0	0
V_3	0	1	1
V_4	0	0	1

Nur in der ersten Zeile sind alle Prämissen wahr, und dort ist auch die Konklusion wahr.

Das Deduktionstheorem

Theorem 4 Für beliebige Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$,

$$M, \varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \psi$$

genau dann wenn

$$M \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \psi$$

Beweis: Wir beweisen das Theorem via vollständiger Induktion über n .

- *Induktionsbasis* $n = 0$: Das Theorem gilt offensichtlich.

Das Deduktionstheorem

● *Induktionsschritt vorwärts:* Angenommen, das Theorem gilt für n . Wir müssen zeigen, dass es dann auch für $n + 1$ gilt. Nehmen wir weiterhin an, dass für alle $\xi \in M$, $V(\xi) = 1$ für eine beliebige Bewertungsfunktion V . Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $V(\varphi_1) = 0$. Nach der Semantik der Implikation gilt dann $V(\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$.
2. $V(\varphi_1) = 1$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $M, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$. Daher gilt auch $V(\varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$. Nach der Semantik der Implikation gilt daher $V(\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$.

Aus der Annahme, dass V die Prämissen verifiziert, folgt also in jedem Fall dass es auch die Konklusion verifiziert.

Das Deduktionstheorem

- *Induktionsschritt rückwärts:* Angenommen das Theorem gilt für n . Nehmen wir weiterhin an, dass $M \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$. Außerdem nehmen wir an, dass für alle $\xi \in M : V(\xi) = 1$, sowie $V(\varphi_i) = 1$ für $1 \leq i \leq n + 1$. Nach Induktionsannahme gilt:
 $M, \varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$. Also $V(\varphi_{n+1} \rightarrow \psi) = 1$. Nach der Semantik der Implikation gilt dann auch $V(\psi) = 1$.

⊢

Deduktionstheorem

- Deduktionstheorem liegt der Methode des **konditionalen Beweises** zu Grunde
- Um zu beweisen, dass *Wenn A , dann B* logisch wahr ist (bzw. aus weiteren Hintergrundprämissen folgt), nimmt man
 - A als zusätzliche Prämisse an, und
 - beweist mit Hilfe dieser Prämisse B .

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Wahrheitstafel-Methode häufig umständlich und redundant
- Alternative: **indirekter Beweis**
- Man startet von der Annahme, dass eine Folgerung ungültig ist, und versucht, einen Widerspruch abzuleiten
- Folgerung ist ungültig, wenn für wenigstens eine Bewertungsfunktion V gilt, dass alle Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist.

Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch

Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch

Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(r \vee p)$ wahr sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

● Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss p wahr sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(r \vee p)$ wahr sein
- also müssen sowohl r als auch p falsch sein

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Beispiel:

$$\Rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r \vee p$$

- keine Prämissen; wenn Konklusion falsch ist, muss $\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss **p wahr** sein und $q \rightarrow r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(q \rightarrow r \vee p)$ wahr sein
- also muss q wahr sein und $r \vee p$ falsch
- also muss $\neg(r \vee p)$ wahr sein
- also müssen sowohl r als auch **p falsch** sein
- **Widerspruch**
- Annahme, dass die Formel kein Theorem ist, hat zu Widerspruch geführt
- also ist die Formel ein Theorem

Die Wahrheitsbaum-Methode

- lässt sich schematisch in Baum-Form darstellen

1.	$\neg(p \rightarrow q \rightarrow r \vee p)$	(A)
2.	p	(1)
3.	$\neg(q \rightarrow r \vee p)$	(1)
4.	q	(3)
5.	$\neg(r \vee p)$	(3)
6.	$\neg r$	(5)
7.	$\neg p$	(5)
8.	x	(1, 7)

- degenerierter Baum, da nicht verzweigend
- i. Allg. können Wahrheitsbäume verzweigen

Die Wahrheitsbaum-Methode

- Zeile besteht aus
 1. Zeilennummer
 2. Formel, die als wahr angenommen wird, und
 3. Zeilennummer, aus der die aktuelle Zeile abgeleitet wurde (erste Zeile ist „Annahme“ (A))
- Wenn in einem Ast
 - die Formel φ steht und oberhalb der aktuellen Zeile die Formel $\neg\varphi$, oder
 - die Formel $\neg\varphi$ und oberhalb der aktuellen Zeile die Formel φ ,dann wird dieser Ast mit „x“ als widersprüchlich gekennzeichnet
- Wahrheitsbaum ist **geschlossen, wenn alle Äste widersprüchlich sind**

Weiteres Beispiel

1. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r)$ (A)
2. $p \rightarrow q$ (1)
3. $\neg((q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r)$ (1)
4. $q \rightarrow r$ (3)
5. $\neg(p \rightarrow r)$ (3)
6. p (5)
7. $\neg r$ (5)

8. $\neg p$ (2)
x (6, 8)

9. q (2)

10. $\neg q$ (4)
x (9, 10)

11. r (4)
x (7, 11)

Weiteres Beispiel

- alle Äste sind geschlossen
- intuitiv: Fallunterscheidungen, aber jeder Fall führt zu Widerspruch
- damit ist Annahme widerlegt, also das ursprüngliche Theorem bewiesen

Wahrheitsbaum-Kalkül

- Verfahren kann z.T. mechanisiert werden
- jede komplexe Formel führt auf genau definierte Weise zu Erweiterung des Wahrheits-Baumes

Regeln

- doppelte Negation

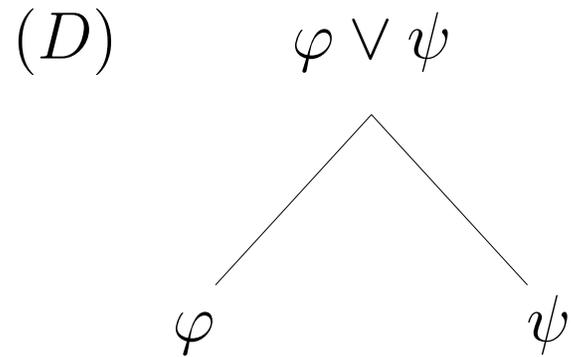
$$(DN) \quad \neg\neg\varphi \\ \varphi$$

- Konjunktion

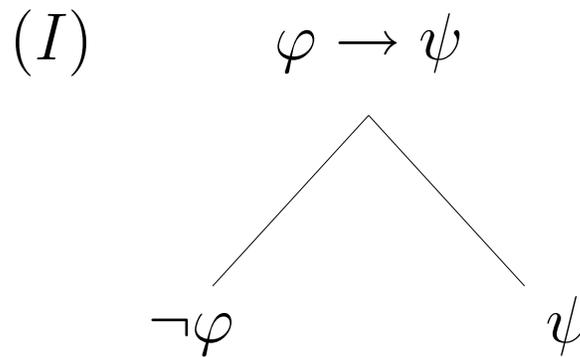
$$(K) \quad \varphi \wedge \psi \\ \varphi \\ \psi$$

Regeln

- Disjunktion

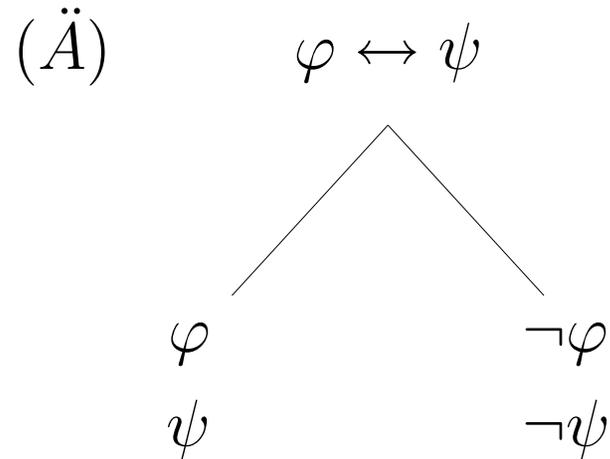


- Implikation

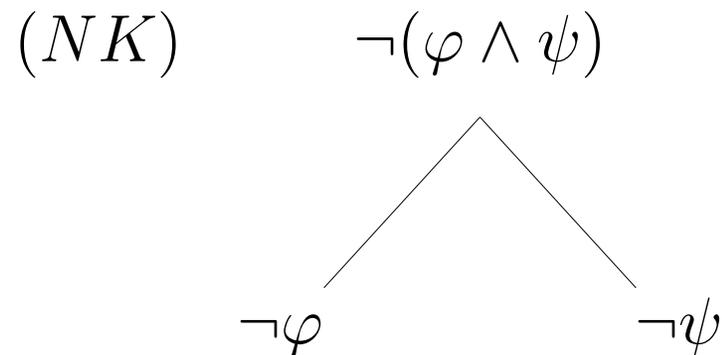


Regeln

- Äquivalenz



- Negation + Konjunktion



Regeln

- Negation + Disjunktion

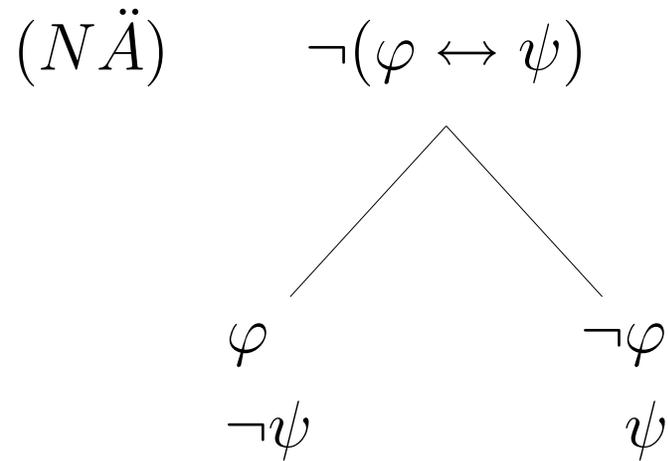
$$(ND) \quad \neg(\varphi \vee \psi)$$
$$\quad \neg\varphi$$
$$\quad \neg\psi$$

- Negation + Implikation

$$(NI) \quad \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$
$$\quad \varphi$$
$$\quad \neg\psi$$

Regeln

- Negation + Äquivalenz



Wahrheitsbaum-Kalkül

Theorem 5 *Eine Formel φ der Aussagenlogik ist genau dann logisch wahr, wenn jeder Ast eines Wahrheitsbaums der Negation $\neg\varphi$ dieses Satzes, der nur mit Hilfe der zuvor angegebenen Regeln entwickelt wurde, mit einem „x“ geschlossen werden kann, da in ihm ein Formel sowohl in negierter als auch in nicht-negierter Form vorkommt.*

Faustregeln

- Man sollte immer zuerst versuchen, nicht verzweigende Regeln anzuwenden.
- Bei der Anwendung von verzweigenden Regeln sollte man darauf achten, dass man möglichst einen Ast sofort schließen kann.
- Die Entwicklung doppelt negierter atomarer Formeln bringt in der Regel keinen Vorteil; doppelt negierte Atome sollten daher nur entwickelt werden, wenn das zum Abschluss eines Astes nötig ist.