

Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 5, 2. Juni 2005

Gerhard Jäger

Natürliches Schließen

Allgemeine Bemerkungen

- es gibt keinen einfachen Algorithmus zum Beweis einer gegebenen Ableitung
- an jeder Stelle in einem Beweis darf ein Unterbeweis mit beliebiger Annahme begonnen werden
- es gibt für jede gültige Ableitung unendlich viele Beweise
- **aber:** man kann mit natürlichem Schließen nicht beweisen, dass eine Formel nicht aus gegebenen Prämissen ableitbar ist
- bei Verdacht auf Nicht-Ableitbarkeit daher eher mit Wahrheitsbäumen arbeiten

Natürliches Schließen

Faustregeln

- immer „Buch führen“, welches Zwischenergebnis gerade bewiesen werden soll
- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \wedge \psi$ ist:
 - beweise zunächst φ
 - beweise dann ψ
 - führe $E\wedge$ durch
- wenn aktuelles Beweisziel $\neg\varphi$ ist:
 - beginne Unterbeweis mit φ als Annahme
 - für irgendeine Formel ψ : beweise sowohl ψ als auch $\neg\psi$
 - beende den Unterbeweis mit $\neg E$

Natürliches Schließen

- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \rightarrow \psi$ ist:
 - beginne neuen Unterbeweis mit φ als Annahme
 - versuche ψ zu beweisen
 - im Erfolgsfall: beende den Unterbeweis mit $E \rightarrow$

Natürliches Schließen

- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \vee \psi$ ist:
 - beweise φ **oder**
 - beweise ψ
 - im Erfolgsfall, führe $\varphi \vee \psi$ per $EV, 1(2)$ ein

Natürliches Schließen

- andernfalls: falls eine zugängliche Formel die Form $\xi \vee \zeta$ hat
 - kombiniere $\vee B$ und $\vee E$:
 - beginne Unterbeweis mit Annahme ξ und beweise φ (oder ψ)
 - leite daraus mit Hilfe von $\vee E$ $\varphi \vee \psi$ ab und beende Unterbeweis
 - beginne zweiten Unterbeweis und beweise ψ (φ)
 - leite daraus mit Hilfe von $\vee E$ $\varphi \vee \psi$ ab und beende Unterbeweis
 - leite mit Hilfe von $\vee B$ $\varphi \vee \psi$ ab

Natürliches Schließen

- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist:
 - beginne Unterbeweis mit Annahme φ
 - beweise ψ
 - beende diesen Unterbeweis und beginne neuen Unterbeweis mit Annahme ψ
 - beweise φ
 - beende den zweiten Unterbeweis und führe \leftrightarrow E durch

Natürliches Schließen

- weiter Faustregeln:
 - führe $\wedge B$, $\rightarrow B$ und $\leftrightarrow B$ immer so früh wie möglich durch
 - führe auch $\neg E$ immer so früh wie möglich durch; wenn eine Beweiszeile die Negation einer früheren zugänglichen (!) Beweiszeile ist, beende sofort den aktuellen Unterbeweis mit $\neg E$

Natürliches Schließen

- wenn keine dieser Faustregeln weiterhilft: **indirekter Beweis:**
- angenommen, φ soll bewiesen werden
 - beginne Unterbeweis mit Annahme $\neg\varphi$
 - versuche, Widerspruch abzuleiten
 - d.h., versuche für irgendeine Formel ψ sowohl ψ als auch $\neg\psi$ zu beweisen
 - im Erfolgsfall: beende aktuellen Unterbeweis mit $\neg E$
 - Ergebnis ist $\neg\neg\varphi$
 - Anwendung von $\neg B$ führt zu φ , wie gewünscht

Beispiele: De Morgans Gesetze (1)

$$1. \neg(p \wedge q) \quad (A)$$

$$2. \neg(\neg p \vee \neg q) \quad (A)$$

$$3. \neg p \quad (A)$$

$$4. \neg p \vee \neg q \quad \vee E1; 3$$

$$5. \neg\neg p \quad \neg E; 3, 4, 2$$

$$6. \neg q \quad (A)$$

$$7. \neg p \vee \neg q \quad \vee E2; 6$$

$$8. \neg\neg q \quad \neg E; 6, 7, 2$$

$$9. p \quad \neg B; 5$$

$$10. q \quad \neg B; 8$$

$$11. p \wedge q \quad \wedge E; 9, 10$$

$$12. \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \quad \neg E; 2, 11, 1$$

$$13. \neg p \vee \neg q \quad \neg B; 12$$

$$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (2)

1. $\neg p \vee \neg q$ (A)

2. $p \wedge q$ (A)

3. p $\wedge E$ 1; 2

4. q $\wedge E$ 2; 2

5. $\neg p$ (A)

6. $\neg p$ (6)

7. $\neg q$ (A)

8. p (A)

9. p 8

10. $\neg p$ $\neg E$; 8, 4, 7

11. $\neg p$ $\vee B$; 1, 5, 6, 7, 9

12. $\neg(p \wedge q)$ $\neg E$; 2, 3, 11

$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Beispiele: De Morgans Gesetze (3)

1. $\neg(p \vee q)$ (A)

2. p (A)

3. $p \vee q$ $\vee E1; 2$

4. $\neg p$ $\neg E; 2, 1, 3$

5. q (A)

6. $p \vee q$ $\vee E2; 5$

7. $\neg q$ $\neg E; 5, 1, 6$

8. $\neg p \wedge \neg q$ $\wedge E; 4, 7$

$\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

Beispiele: De Morgans Gesetze (4)

1. $\neg p \wedge \neg q$ (A)

2. $\neg p$ $\wedge E$ 1; 1

3. $\neg q$ $\wedge E$ 2; 1

4. $p \vee q$ (A)

5. p (A)

6. p 5

7. q (A)

8. $\neg p$ (A)

9. $\neg p$ 8

10. $\neg\neg p$ $\neg E$; 8, 3, 7

11. p $\neg B$; 10

12. p $\vee B$; 4, 5, 6, 7, 11

13. $\neg(p \vee q)$ $\neg E$; 4, 2, 12

$\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

Lemmata

- Schnittregel:

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \quad N, \varphi \Rightarrow \xi}{M, N \Rightarrow \xi}$$

- einmal bewiesene Ableitungen können wiederverwendet werden
- vereinfacht praktische Arbeit massiv

Ex falsum quod libet

1. φ (A)

2. $\neg\varphi$ (A)

3. $\neg\psi$ (A)

4. $\neg\neg\psi$ $\neg E; 3, 1, 2$

5. ψ $\neg B; 4$

$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$

- diese Folgerung kann, einmal bewiesen, als neue Regel verwendet werden
- wenn an einer Stelle in einem Beweis sowohl φ als auch $\neg\varphi$ zugänglich sind, darf eine beliebige Formel hinzugefügt werden