Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 6, 16. Juni 2005

Gerhard Jäger

Zusammenfassung: Aussagenlogik

- hier behandelt: **klassische Aussagenlogik**
- daneben existiert eine Vielzahl nicht-klassischer Aussagenlogiken (Intuitionistische Logik, Relevanzlogik, Modallogiken, Lineare Logik, ...)

Zusammenfassung: Aussagenlogik

- meta-logische Eigenschaften der klassischen Aussagenlogik:
  - zweiwertige Semantik (jede Aussage ist entweder wahr oder falsch)
  - logische Folgerung ist korrekt und vollständig syntaktisch beschreibbar: es existieren mehrere Systeme syntaktischer Regeln (Wahrheitsbäume, natürliches Schließen), die Menge der Tautologien eindeutig beschreibt
  - logische Folgerung ist **entscheidbar**: es existiert mechanisches Entscheidungsverfahren (Wahrheitstafeln), dass es erlaubt, Tautologien von Nicht-Tautologien zu unterscheiden

Zusammenfassung: Aussagenlogik

- Ausblick:
  - (klassische) Prädikatenlogik erster Stufe (Rest des Kurses) ist korrekt und vollständig beschreibbar, aber nicht entscheidbar
  - Prädikatenlogik zweiter Stufe (und höherer Stufe), Typentheorie sind weder entscheidbar noch vollständig beschreibbar

Prädikatenlogik: Einführung

- Erweiterung der Aussagenlogik
- syntaktische Struktur der PL ist z.T. von Struktur der natürlichen Sprache inspiriert
- wesentliche Neuerungen:
  - Aufspaltung von atomaren Formeln in **Prädikate** (vgl. Verb) und **Argumente** (vgl. Subjekt, Objekt)
  - Einbeziehung von **Quantifikation**: Gegenstücke zu dt. Wörtern *alle, einige*

Prädikatenlogik: atomare Formeln

Syntax

- *jo*, *bertie*, *ethel*, *the-cake* ... sind Individuenkonstanten (Namen)
- *Run*, *Laugh*, *Howl*, *Sing*, ... sind einstellige Prädikate
- *Rain*, *Snow*, ... sind nullstellige Prädikate
- *Eat*, *Like*, *Loath* ... sind zweistellige Prädikate
- *Give* ist ein dreistelliges Prädikat

Prädikatenlogik: atomare Formeln

Syntax

Definition 1

1. *Es gibt unendlich viele Individuenkonstanten.*
2. *Für jede natürliche Zahl n gibt es unendlich viele n-stellige Prädikate*
3. *Wenn P ein n-stelliges Prädikat ist und $c_1, \ldots, c_n$ Individuenkonstanten, dann ist $P(c_1, \ldots, c_n)$ eine atomare Formel.*
4. *Jede atomare Formel ist eine Formel.*
5. *Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$ Formeln.*

Prädikatenlogik: atomare Formeln

- Bemerkungen zu Notationskonventionen:
  - Die atomaren Sätze der Aussagenlogik lassen sich als 0-stellige Prädikate auffassen.
  - Prädikate und Individuenkonstanten werden in kursiven lateinischen Buchstaben geschrieben
  - Prädikatsnamen beginnen mit Großbuchstaben und Individuenkonstanten mit Kleinbuchstaben
  - Prädikate und Individuenkonstanten müssen nicht natürlichsprachlichen Wörtern ähneln – das dient nur der besseren Anschaulichkeit

Prädikatenlogik: atomare Formeln

- üblich sind Namen, die nur aus einem Buchstaben bestehen, z.B.:

$$P(a) \wedge R(d, e) \rightarrow Q(a, d, e)$$

- Klammern um die Argumente und Kommata zwischen den Argumenten werden manchmal weggelassen

$$Pa \wedge Rde \rightarrow Qade$$

Prädikatenlogik: atomare Formeln

Beispiele

- $Run(jo)$
- $Rain$
- $Like(bertie, ethel)$
- $Give(bertie, ethel, the\text{-}cake)$
- $Run(jo) \rightarrow Give(bertie, ethel, the\text{-}cake)$
- $Rain \vee \neg Rain$
- $\neg Like(ethel, bertie) \rightarrow \neg Like(bertie, ethel)$

Übersetzung: atomare Sätze

- Faustregeln für Übersetzung:
  - atomare Sätze werden als atomare Formeln übersetzt
  - Eigennamen und definite Beschreibungen werden als Individuenkonstanten übersetzt
  - 0-stellige Verben (wie *regnen*) werden als 0-stellige Prädikate übersetzt
  - intransitive Verben und prädikative Adjektive werden als 1-stellige Prädikate übersetzt
  - transitive Verben werden als 2-stellige Prädikate übersetzt
  - ditransitive Verben werden als 3-stellige Prädikate übersetzt

Übersetzung: atomare Sätze

(1) a. Chester ran.
b. Chester ate the cake.
c. Ethel gave the cake to Jo.
d. Ethel gave Chester the cake.
e. It rained.

(2) a. $Run(chester)$
b. $Eat(chester, the\text{-}cake)$
c. $Give(ethel, the\text{-}cake, jo)$
d. $Give(ethel, the\text{-}cake, jo)$
e. $Rain$

Prädikatenlogik: atomare Sätze

- Semantik
  - Modell M, besteht aus
    - Individuenbereich E und
    - Interpretationsfunktion F
  - Interpretationfunktion bildet
    - Individuenkonstanten auf Elemente von E ab und
    - n-stellige Prädikate auf n-stellige Relationen über E.
  - Erweiterung auf Formeln:

$$
\begin{aligned}
[P(c_1, \ldots, c_n)]^M = 1 \quad & \text{gdw.} \quad \langle F(c_1), \ldots, F(c_n) \rangle \in F(P) \\
[c_1 = c_2]^M = 1 \quad & \text{gdw.} \quad F(c_1) = F(c_2)
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik: ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
M &= \langle E, F \rangle \\
E &= \{\textbf{DOG, CAT, MAN}_1\textbf{, MAN}_2\textbf{, WOMAN}_1\textbf{,} \\
&\quad\ \textbf{WOMAN}_2\textbf{, CAKE}\} \\
F(\textit{jo}) &= \textbf{MAN}_1 \\
F(\textit{bertie}) &= \textbf{MAN}_2 \\
F(\textit{ethel}) &= \textbf{WOMAN}_1 \\
F(\textit{fiona}) &= \textbf{WOMAN}_2 \\
F(\textit{chester}) &= \textbf{DOG} \\
F(\textit{prudence}) &= \textbf{CAT} \\
F(\textit{the-student}) &= \textbf{MAN}_1 \\
F(\textit{the-cat}) &= \textbf{CAT} \\
F(\textit{the-cake}) &= \textbf{CAKE}
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik: ein Beispiel

$$\begin{aligned}
F(\textit{Run}) &= \{\textbf{DOG, CAT}\} \\
F(\textit{Laugh}) &= \{\textbf{MAN}_1\textbf{, WOMAN}_1\} \\
F(\textit{Howl}) &= \{\textbf{DOG}\} \\
F(\textit{Sing}) &= \{\textbf{WOMAN}_2\} \\
F(\textit{Scream}) &= \emptyset \\
F(\textit{Crazy}) &= \emptyset \\
F(\textit{Disgusting}) &= \{\textbf{CAKE}\} \\
F(\textit{Wealthy}) &= \{\textbf{MAN}_2\} \\
F(\textit{Happy}) &= \{\textbf{MAN}_1\textbf{, MAN}_2\textbf{, WOMAN}_1\} \\
F(\textit{Messy}) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Prädikatenlogik: ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
F(\textit{Like}) \quad = \quad & \{\langle \textbf{MAN}_1, \textbf{WOMAN}_1 \rangle \\
& \langle \textbf{MAN}_1, \textbf{MAN}_2 \rangle, \\
& \langle \textbf{MAN}_1, \textbf{WOMAN}_2 \rangle, \\
& \langle \textbf{MAN}_1, \textbf{MAN}_1 \rangle, \\
& \langle \textbf{WOMAN}_1, \textbf{WOMAN}_2 \rangle, \\
& \langle \textbf{WOMAN}_1, \textbf{MAN}_1 \rangle, \\
& \langle \textbf{WOMAN}_1, \textbf{CAT} \rangle, \\
& \langle \textbf{WOMAN}_2, \textbf{WOMAN}_1 \rangle\}
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik: ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
F(\textit{Loathe}) &= \{\langle \textbf{MAN}_1, \textbf{DOG}\rangle \\
&\quad \langle \textbf{MAN}_2, \textbf{DOG}\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{WOMAN}_1, \textbf{DOG}\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{WOMAN}_2, \textbf{DOG}\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{WOMAN}_2, \textbf{MAN}_1\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{CAT}, \textbf{DOG}\rangle\} \\
F(\textit{Poison}) &= \{\langle \textbf{CAKE}, \textbf{DOG}\rangle\} \\
F(\textit{Eat}) &= \{\langle \textbf{DOG}, \textbf{CAKE}\rangle\} \\
F(\textit{Read}) &= \{\langle \textbf{WOMAN}_1, \textbf{BOOK}\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{MAN}_2, \textbf{BOOK}\rangle\} \\
F(\textit{Kick}) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik: ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
F(\textit{Give}) &= \{\langle \textbf{WOMAN}_2\textbf{, CAKE, MAN}_1\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{MAN}_1, \textbf{CAKE}, \textbf{DOG}\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{MAN}_1, \textbf{BOOK}, \textbf{MAN}_2\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{MAN}_2, \textbf{BOOK}, \textbf{WOMAN}_1\rangle, \\
&\quad \langle \textbf{MAN}_1, \textbf{CAT}, \textbf{WOMAN}_2\rangle\} \\
F(\textit{Rain}) &= 1 \\
F(\textit{Snow}) &= 0
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik: ein Beispiel

(3) a. Ethel was happy and laughed.
b. Fiona sang and was happy.
c. Bertie was wealthy.
d. The dog ran and howled.
e. The cat ran.
f. The cake was disgusting.

Variablen

- an Stelle von Namen können auch Pronomen stehen
- Sätze mit Pronomen haben i.Allg. auch in einem bekannten Modell keinen definiten Wahrheitswert

(4)
a. He ran.
b. Chester ate it.
c. She gave it to him.
d. She gave him the cake.

- Wahrheitswert hängt davon ab, worauf sich die Pronomen beziehen
- Pronomen werden in der Prädikatenlogik als **Variable** übersetzt

Variablen

- Konventionen:
  - Variable werden geschrieben als kursive lateinische Kleinbuchstaben vom Ende des Alphabets, u.U. versehen mit Indizes oder Apostrophs

$$x, y, z', w_3, \ldots$$

  - gleichnamige Variable beziehen sich auf den selben („unbekannten“) Gegenstand
  - verschiedennamige Variable können sich auf verschiedene Dinge beziehen (ist aber nicht notwendig)

Variablen

- Übersetzungskonventionen:
  - Pronomen werden genau dann als Variable übersetzt, wenn sie nicht (im gegebenen Kontext) gleichbedeutend sind mit einer Individuenkonstanten
  - Wenn zwei Pronomen sich auf das selbe Individuum beziehen, werden sie durch gleichnamige Variablen übersetzt

(5)
a. Er läuft.
b. Peter kennt ihn.
c. Wenn Peter läuft, singt er.
d. Wenn Peter läuft, singt sie.
e. Hans rasiert sich.
f. Er rasiert sich.
g. Er rasiert ihn.

Variablen

- Übersetzungskonventionen:
  - Pronomen werden genau dann als Variable übersetzt, wenn sie nicht (im gegebenen Kontext) gleichbedeutend sind mit einer Individuenkonstanten
  - Wenn zwei Pronomen sich auf das selbe Individuum beziehen, werden sie durch gleichnamige Variablen übersetzt

(6)
a. Er läuft. $\rightsquigarrow Lx$
b. Peter kennt ihn. $\rightsquigarrow Kpy$
c. Wenn Peter läuft, singt er. $\rightsquigarrow Lp \longrightarrow Sp$
d. Wenn Peter läuft, singt sie. $\rightsquigarrow Lp \longrightarrow Sx$
e. Hans rasiert sich. $\rightsquigarrow Rhh$
f. Er rasiert sich. $\rightsquigarrow Rww$
g. Er rasiert ihn. $\rightsquigarrow Rxy$

Variablen

- natürliche Sprache: Pronomen können mehrdeutig sein

  Er sah ihn, und er freute sich. (er$\rightsquigarrow$ Sehender/Gesehener)

- Prädikatenlogik: durch Benennung mit Variablen**namen** keine Ambiguität (Mehrdeutigkeit)

  $Sxy \wedge Fx$ bzw. $Sxy \wedge Fy$

Interpretation von Variablen

- Variablen referieren, genau wie Individuenkonstanten, auf Individuen, also Elemente von E
- daher: offizieller Name ist **Individuenvariablen**
- im Unterschied von Individuen ist ihre Referenz nicht durch das Modell festgelegt
  Wenn man das Modell kennt, ist man sozusagen allwissend, d.h., man kennt alle relevanten Fakten. Dann kennt man natürlich auch die Interpretation aller Konstanten und Prädikate, und die Wahrheitwerte aller Sätze, sofern sie einen definiten Wahrheitswert haben. Aber auch wenn alle Fakten kennt, weiß man nicht, worauf sich der Sprecher mit einem Personalpronomen in der dritten Person bezieht, sprich, worauf eine Variable referiert.

Interpretation von Variablen

- Interpretation von Variablen ist aber nicht völlig beliebig
- verschiedene Vorkommen der gleichen Variablen beziehen sich auf das selbe Objekt
- manche Formeln sind unabhängig von der Referenz der Variablen wahr bzw. falsch

$$Px \vee \neg Px$$

$$\textsf{\textit{Loathe}}(x, x)$$

$$\textsf{\textit{Messy}}(w)$$

- daher: Interpretation von Variablen wird durch **Belegungsfunktion** festgelegt (sprich: die Variablen werden mit Werten „belegt")

Variablen: Syntax

Definition 1 (Syntax der Prädikatenlogik, zweite Version)

1. *Es gibt unendlich viele Individuenkonstanten.*
2. *Es gibt unendlich viele Individuenvariablen.*
3. *Jede Individuenkonstante und jede Individuenvariable ist ein Term*
4. *Für jede natürliche Zahl n gibt es unendlich viele n-stellige Prädikate*
5. *Wenn P ein n-stelliges Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.*
6. *Jede atomare Formel ist eine Formel.*
7. *Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$ Formeln.*

Variablen: Semantik

Definition 1 (Belegungsfunktion) *Eine* Belegungsfunktion g *für ein Modell* $M = \langle E, F \rangle$ *ist eine Funktion von der Menge der Variablen in den Individuenbereich* E*.*

Variablen: Semantik

Definition 1 (Semantik der Prädikatenlogik (vorl.)) *Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell und g eine Belegungsfunktion für M.*

1. $[c]_g^M = F(c)$, *wenn c eine Individuenkonstante ist*
2. $[v]_g^M = g(v)$, *wenn v eine Individuenvariable ist*
3. $[P(t_1, \ldots, t_n)]_g^M = 1$ *gdw.* $\langle [t_1]_g^M, \ldots, [t_n]_g^M \rangle \in F(P)$
4. $[\neg\varphi]_g^M = 1 - [\varphi]_g^M$
5. $[\varphi \wedge \psi]_g^M = \min([\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
6. $[\varphi \vee \psi]_g^M = \max([\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
7. $[\varphi \rightarrow \psi]_g^M = \max(1 - [\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
8. $[\varphi \leftrightarrow \psi]_g^M = 1 - ([\varphi]_g^M - [\psi]_g^M)^2$