

Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 7, 23. Juni 2005

Gerhard Jäger

Quantoren

- bisher keine wesentliche Erweiterung der Aussagenlogik
- insbesondere ist die Theorie der **logischen Folgerung** identisch mit der für die Aussagenlogik
- der eigentliche Quantensprung von Aussagen- zur Prädikatenlogik ist die Einführung von **Quantoren**

Quantoren

- PL (Prädikatenlogik) umfasst auch klassische Syllogistik

- (1)
- Alle Menschen sind sterblich.
 - Kein Grieche ist ein Philosoph.
 - Einige Philosophen sind Musiker.
 - Nicht alle Griechen sind Musiker.

Ausdrücke wie *alle*, *kein*, *einige*, *jeder*, ... heißen **Quantoren**.

Quantoren

- PL erweitert Syllogistik auf zweierlei Weise:
 - mehrere Quantoren innerhalb eines einfachen Satzes (bzw. einer atomaren Formel)
- (2) Jeder Grieche kennt einen Musiker.
 - gebundene Pronomen/Variablen:
- (4) Für *jeden Griechen* gilt: wenn *er* einen Musiker kennt, dann kennt *er* auch ein Instrument.

Der Allquantor

- neues Symbol: \forall
- ausgesprochen: „für alle“ oder „für jedes“
- quasi wörtliche Übersetzung für das Deutsche *für jedes Ding gilt*:
- im Dt.: *jedes Ding* wird aufgegriffen von Pronomen es
- in PL:
 - Pronomen wird als Variable übersetzt
 - zur Eindeutigkeit wird am Allquantor angegeben, welche Variable er bindet

Der Allquantor

Für jedes Ding gilt: wenn es ein Dreieck ist, ist es ein Vieleck.

$$\rightsquigarrow \\ \forall x(\textit{Dreieck}(x) \rightarrow \textit{Vieleck}(x))$$

Für jedes Ding gilt: es ist ein Grieche, oder es ist kein Grieche.

$$\rightsquigarrow \\ \forall y(\textit{Grieche}(y) \vee \neg \textit{Grieche}(y))$$

Der Allquantor

Mit Hilfe geeigneter Paraphrasen können Ausdrücke wie *alle* und *jeder* durch den Allquantor übersetzt werden. Z.B.:

- Originalsatz:

Alle Menschen sind sterblich.

- Paraphrase:

Für jedes Ding gilt: wenn es ein Mensch ist, dann ist es sterblich.

- Übersetzung:

$$\forall x (\text{Mensch}(x) \rightarrow \text{Sterblich}(x))$$

Der Existenzquantor

- neues Symbol: \exists
- ausgesprochen: „es gibt ein“ oder „es existiert ein“
- PL-Gegenstück zum Deutschen *Es gibt ein Ding, so dass*
- wie beim Allquantor wird explizit angegeben, welche Variable gebunden wird

Der Existenzquantor

Es gibt ein Ding, so dass es ein Rechteck ist und ein Rhombus. \rightsquigarrow

$$\exists x(\textit{Rechteck}(x) \wedge \textit{Rhombus}(x))$$

Es gibt ein Ding, so dass es ein Griech ist, aber kein Philosoph. \rightsquigarrow

$$\exists z(\textit{Griech}(z) \wedge \neg \textit{Philosoph}(z))$$

Der Existenzquantor

Mit Hilfe geeigneter Paraphrasen können Ausdrücke wie *ein*, *einige* und *manche* durch den Existenzquantor übersetzt werden. Z.B.:

- Originalsatz:

Einige Griechen sind Philosophen.

- Paraphrase:

Es gibt ein Ding, so dass es ein Grieche ist und ein Philosoph.

- Übersetzung:

$$\exists y(\textit{Grieche}(y) \wedge \textit{Philosoph}(y))$$

Beschränkte Quantifikation

- Quantifikation in natürlicher Sprache ist normalerweise **beschränkt**

*Alle **Menschen** sind sterblich.
Einige **Griechen** sind Philosophen.*

- logische Quantoren sind im Prinzip **unbeschränkt**

*für jedes **Ding**, es gibt ein **Ding***

- Beschränkung des Allquantors wird durch **Implikation** übersetzt

$$\forall x (\text{Mensch}(x) \rightarrow \text{Sterblich}(x))$$

- Beschränkung des Existenzquantors wird durch **Konjunktion** übersetzt

$$\exists x (\text{Griechen}(x) \wedge \text{Philosoph}(x))$$

Mehrfach-Quantifikation

- Ein Satz kann mehrere quantifizierende Ausdrücke enthalten

- (5)
- Jeder Mann liebt jedes Gericht.
 - Alle Kinder lesen alle Bücher.
 - Einige Kinder gaben einem Gast einen Bonbon.

- entsprechend enthält die Übersetzung mehrere Quantoren

- (6)
- $\forall x(\text{Mann}(x) \rightarrow \forall y(\text{Gericht}(y) \rightarrow \text{Liebt}(x, y)))$
 - $\forall x(\text{Kind}(x) \rightarrow \forall y(\text{Buch}(y) \rightarrow \text{Liest}(x, y)))$
 - $\exists x(\text{Kind}(x) \wedge \exists y(\text{Gast}(y) \wedge \exists z(\text{Bonbon}(z) \wedge \text{Gab}(x, y, z))))$

Faustregeln für die Übersetzung

- gegeben: deutscher Satz S , dessen Übersetzung Quantoren benötigt
- paraphrasiere S so, dass er mit *für alle P gilt, dass* oder *es gibt ein P dass ...* beginnt („ P “ steht für ein Substantiv)

- übersetze als

$$\forall x(P(x) \rightarrow \dots)$$

bzw.

$$\exists x(P(x) \wedge \dots)$$

(„ P “ ist die Übersetzung des fraglichen Substantives)

- übersetze den Rest des Satzes

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.

(3) a. Löwen haben eine Mähne.

Beispiele

- (1) a. Selig sind die Sanftmütigen.
b. Für jeden Sanftmütigen gilt: er ist selig.

- (2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.
b. Für jeden Menschen gilt: er betrügt sich selbst.

- (3) a. Löwen haben eine Mähne.
b. Für jeden Löwen gilt: es gibt eine Mähne, so dass er sie hat.

Beispiele

- (1) a. Selig sind die Sanftmütigen.
b. Für jeden Sanftmütigen gilt: er ist selig.
c. $\forall x(\textit{Sanftmuetig}(x) \rightarrow \textit{Selig}(x))$
- (2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.
b. Für jeden Menschen gilt: er betrügt sich selbst.
c. $\forall x(\textit{Mensch}(x) \rightarrow \textit{Betruengt}(x, x))$
- (3) a. Löwen haben eine Mähne.
b. Für jeden Löwen gilt: es gibt eine Mähne, so dass er sie hat.
c. $\forall y(\textit{Loewe}(y) \rightarrow \exists w(\textit{Maehne}(w) \wedge \textit{Hat}(y, w)))$

Skopusambiguität

- Sätze mit mehreren Quantoren können **mehrdeutig** (Fachausdruck: **ambig**) sein
- Ausdrücke der Prädikatenlogik sind nie mehrdeutig
- Ambige Sätze haben deshalb mehrere Übersetzungen

Jeder Mann liebt eine Frau.

$\forall x(\text{Mann}(x) \rightarrow \exists y(\text{Frau}(y) \wedge \text{Liebt}(x, y)))$ $\exists y(\text{Frau}(y) \wedge \forall x(\text{Mann}(x) \rightarrow \text{Liebt}(x, y)))$

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 1 (Syntax der Prädikatenlogik, endgültige Version)

1. *Es gibt unendlich viele Individuenkonstanten.*
2. *Es gibt unendlich viele Individuenvariablen.*
3. *Jede Individuenkonstante und jede Individuenvariable ist ein Term*
4. *Für jede natürliche Zahl n gibt es unendlich viele n -stellige Prädikate*
5. *Wenn P ein n -stelliges Prädikat ist und t_1, \dots, t_n Terme, dann ist $P(t_1, \dots, t_n)$ eine atomare Formel.*
6. *Jede atomare Formel ist eine Formel.*
7. *Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$ Formeln.*
8. *Wenn v eine Variable ist und φ eine Formel, dann sind $\forall v(\varphi)$ und $\exists v(\varphi)$ auch Formeln*

Syntax von PL: Konventionen

- Es gelten die selben Klammerkonventionen wie in der Aussagenlogik
- Außerdem gilt, dass $\forall v$ und $\exists v$ stärker binden als alle anderen Operatoren

$$\forall x P x \wedge Q x$$

steht also für

$$\forall x (P(x)) \wedge Q(x)$$

nicht für

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Freie und gebundene Variablen

- man unterscheidet **freie** und gebundene Vorkommen von Variablen in eine Formel
- gebundene Vorkommen von einer Variablen in einer Formel sind immer **von einem bestimmten Quantor** gebunden

Freie und gebundene Variablen

Definition 2 (Freie und gebundene Variablen-Vorkommen)

- *Alle Variablen-Vorkommen in einer atomaren Formel φ sind frei in φ .*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist auch frei in $\neg\varphi$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ und ψ ist auch frei in $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist auch frei in $\forall w(\varphi)$ und $\exists w(\varphi)$, wenn $v \neq w$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist*
 - *in $\forall v(\varphi)$ durch $\forall v$ gebunden, und*
 - *in $\exists v(\varphi)$ durch $\exists v$ gebunden.*

Gebundene Variablen und Skopus

- die Formel innerhalb des Klammerpaares nach einem Quantor heißt der **Skopus des Quantors**
- Beispiele (Quantor in grün, Skopus des Quantors in rot)

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge Q(x)$$

$$\exists x(R(x)) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\exists x(R(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$$

- Ein Quantor Q bindet ein Variablenvorkommen v gdw.
 - v im Skopus von Q steht, und
 - zwischen Q und v kein weiterer **gleichnamiger** Quantor steht, in dessen Skopus v steht (und der v deshalb binden könnte)

Prädikatenlogik: noch ein Beispiel

$$M = \langle E, F \rangle$$

$$E = \{\mathbf{DOG}, \mathbf{CAT}, \mathbf{MAN}_1, \mathbf{MAN}_2, \mathbf{WOMAN}_1, \\ \mathbf{WOMAN}_2, \mathbf{CAKE}, \mathbf{MOUSE}\}$$

$$F(\mathit{jo}) = \mathbf{MAN}_1$$

$$F(\mathit{bertie}) = \mathbf{MAN}_2$$

$$F(\mathit{ethel}) = \mathbf{WOMAN}_1$$

$$F(\mathit{fiona}) = \mathbf{WOMAN}_2$$

$$F(\mathit{chester}) = \mathbf{DOG}$$

$$F(\mathit{prudence}) = \mathbf{CAT}$$

Prädikatenlogik: noch ein Beispiel

$$F(\textit{Animal}) = \{\mathbf{DOG, CAT, MOUSE}\}$$

$$F(\textit{Run}) = \{\mathbf{DOG, CAT}\}$$

$$F(\textit{Laugh}) = \{\mathbf{MAN}_1, \mathbf{WOMAN}_1\}$$

$$F(\textit{Howl}) = \{\mathbf{DOG}\}$$

$$F(\textit{Sing}) = \{\mathbf{WOMAN}_2\}$$

$$F(\textit{Scream}) = \emptyset$$

$$F(\textit{Squeak}) = \{\mathbf{MOUSE}\}$$

$$F(\textit{Crazy}) = \emptyset$$

$$F(\textit{Poison}) = \{\langle \mathbf{CAKE, DOG} \rangle\}$$

$$F(\textit{Eat}) = \{\langle \mathbf{DOG, CAKE} \rangle\}$$

Allquantor: Interpretation

- **Notationskonvention:**

$$[t/v]\varphi$$

ist die Formel, die wie φ ist, abgesehen davon, dass alle **freien** Vorkommen der Variablen v durch t ersetzt wurden

Allquantor: Interpretation

- Intuition:

$$\forall v \varphi$$

ist wahr genau dann wenn $[c/v]\varphi$ wahr ist für alle Individuenkonstanten c

- Aber: in unserem Modell gilt

$$Animal(c) \rightarrow Run(c)$$

für alle Individuenkonstanten c ; dennoch ist

$$\forall x (Animal(x) \rightarrow Run(x))$$

falsch!

- Grund: die Maus „hat keinen Namen“

Allquantor: Interpretation

- besserer Ansatz: damit

$$\forall x(\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x))$$

wahr ist, muss

$$\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x)$$

wahr sein, egal, worauf sich x bezieht!

- Angenommen, $g(x) = \mathbf{MOUSE}$
- dann:

$$[\mathit{Animal}(x) \rightarrow \mathit{Run}(x)]_g^M = 0$$

Allquantor: Interpretation

- Vielleicht so:

$$[\forall v(\varphi)]^M = 1$$

genau dann wenn für alle g :

$$[\forall v(\varphi)]_g^M = 1$$

- Aber was ist dann mit Formeln wie

$$\forall x \neg \forall y \textit{Poison}(x, y)$$

Allquantor: Interpretation

- zwei Probleme:
 - auch quantifizierte Formeln können freie Variablen enthalten; also muss auch die Interpretation von quantifizierten Formeln von der Belegungsfunktion abhängen
 - nicht die komplette Belegungsfunktion darf variiert werden, sondern nur die Interpretation der gebundenen Variablen

Allquantor: Interpretation

- Notation:

- sei $a \in E$ eine Objekt des Modells, v eine Variable und g eine Belegungsfunktion
- $g[a/v]$: die Belegungsfunktion, die genau wie g ist, außer dass

$$g[a/v](v) = a$$

- endgültige Version: Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell.

$$[\forall v(\varphi)]_g^M = 1$$

genau dann wenn

$$[\varphi]_{g[a/v]}^M = 1$$

für alle $a \in E$

Existenzquantor: Interpretation

- Intuition:

$$\exists v(\varphi)$$

ist wahr, genau dann wenn für irgendeine Individuenkonstante c gilt

$$[c/v]\varphi$$

ist wahr

- aber:

$$\exists x(\mathit{Squeak}(x))$$

ist wahr in unserem Modell, obwohl es keine Individuenkonstante c gibt, so dass folgendes wahr wäre:

$$\mathit{Squeak}(c)$$

Existenzquantor: Interpretation

- Problem wird ebenfalls durch Umweg über Belegungsfunktion umgangen:

$$[\exists v(\varphi)]_g^M = 1$$

genau dann wenn es ein Objekte $a \in E$ gibt, so dass

$$[\varphi]_{g[a/v]}^M = 1$$

- in dem Beispiel wäre

$$[\textit{Squeak}(x)]_{g[\text{MOUSE}/x]}^M = 1$$

und damit die quantifizierte Formel auch wahr

Semantik der Prädikatenlogik

Definition 3 (Semantik der Prädikatenlogik (endgült.)) Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell und g eine Belegungsfunktion für M .

1. $[c]_g^M = F(c)$, wenn c eine Individuenkonstante ist
2. $[v]_g^M = g(v)$, wenn v eine Individuenvariable ist
3. $[P(t_1, \dots, t_n)]_g^M = 1$ gdw. $\langle [t_1]_g^M, \dots, [t_n]_g^M \rangle \in F(P)$
4. $[\neg\varphi]_g^M = 1 - [\varphi]_g^M$
5. $[\varphi \wedge \psi]_g^M = \min([\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
6. $[\varphi \vee \psi]_g^M = \max([\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
7. $[\varphi \rightarrow \psi]_g^M = \max(1 - [\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
8. $[\varphi \leftrightarrow \psi]_g^M = 1 - ([\varphi]_g^M - [\psi]_g^M)^2$
9. $[\forall v(\varphi)]_g^M = \min(\{[\varphi]_{g[a/v]}^M \mid a \in E\})$
10. $[\exists v(\varphi)]_g^M = \max(\{[\varphi]_{g[a/v]}^M \mid a \in E\})$