Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 8, 30. Juni 2005

Gerhard Jäger

Beispiele

Anmerkung: wenn der Wahrheitswert einer Formel in einem Modell nicht von der Belegungsfunktion abhängt, kann die Belegungsfunktion weggelassen werden. Statt $[\varphi]_g^M$ schreibt man also einfach $[\varphi]^M$.

- $[\exists x \textit{Animal}(x)]^M$
- $[\exists x (\textit{Animal}(x) \wedge \textit{Run}(x))]^M$
- $[\exists x (\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x))]^M$
- $[\forall x (\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x))]^M$
- $[\exists x \textit{Scream}(x)]^M$

Beispiele

Anmerkung: wenn der Wahrheitswert einer Formel in einem Modell nicht von der Belegungsfunktion abhängt, kann die Belegungsfunktion weggelassen werden. Statt $[\varphi]_g^M$ schreibt man also einfach $[\varphi]^M$.

- $[\exists x \textit{Animal}(x)]^M = 1$
- $[\exists x(\textit{Animal}(x) \wedge \textit{Run}(x))]^M = 1$
- $[\exists x(\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x))]^M = 1$
- $[\forall x(\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x))]^M = 0$
- $[\exists x \textit{Scream}(x)]^M = 0$

Unentscheidbarkeit

- für endliche Modell lässt sich Wahrheitswert immer bestimmen
- in unendlichen Modellen Bestimmung des Wahrheitswerts nicht immer möglich
  - Beispiel: Primzahlzwillinge
  - Modell: System der natürlichen Zahlen
  - Wahrheitswert der folgenden Formel (mit der intendierten Interpretation der Prädikate) ist unbekannt:

$$\forall x \exists y \exists z (x < y \wedge \mathit{Primzahl}(y) \wedge \mathit{Primzahl}(z) \wedge \mathit{Plus}(y, 2, z))$$

Folgerung

- wesentlich für Logik ist Begriff der **Folgerung**
- Wahrheit ist quasi ein Hilfsbegriff
- Wie lässt sich prädikatenlogische Folgerung definieren?

Logische Folgerung

Definition 1 (Logische Folgerung) *Aus den Prämissen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ folgt die Konklusion ψ logisch – formal notiert als*

$$\varphi_1 \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$$

genau dann wenn für alle Modelle M und alle Belegungsfunktionen g gilt: wenn $[\varphi_i]_g^M = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann gilt auch $[\psi]_g^M = 1$.

- die aussagenlogischen Definitionen für die anderen logischen Eigenschaften/Relationen lassen sich analog auf die Prädikatenlogik übertragen:

Tautologien

Definition 2 (Tautologie) *Eine Formel φ ist eine typentheoretische **Tautologie**, formal notiert als*

$$\Rightarrow \varphi$$

genau dann wenn für alle Modelle M und alle Belegungsfunktionen g gilt:

$$[\varphi]_g^M = 1$$

Kontradiktionen

Definition 3 (Kontradiktion) *Eine Formel φ ist eine typentheoretische* ***Kontradiktion*** *genau dann wenn für alle Modelle M und alle Belegungsfunktionen g gilt:*

$$[\varphi]_g^M = 0$$

Logische Äquivalenz

Definition 4 (Logische Äquivalenz) *Zwei Formeln φ und ψ sind **logisch äquivalent**, formal notiert als*

$$\varphi \Leftrightarrow \psi$$

genau dann wenn für alle Modelle M und alle Belegungsfunktionen g gilt:

$$[\varphi]_g^M = [\psi]_g^M$$

- die metalogischen Theoreme der Aussagenlogik (siehe Folien Teil 2 und Teil 3) gelten auch für die Prädikatenlogik
- wie zeigt man, dass z.B. eine Formel eine Tautologie ist?
- Beispiel:

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists y P(y)$$

- zwei *semantische Methoden*:
  - Umformung in eine mengentheoretische Aussage
  - Versuch, ein Gegenmodell zu konstruieren

Reduktion auf Mengentheorie

zu beweisen ist:

- für alle M und g: $[\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg\exists y P(y)]_g^M = 1$

schrittweise Umformung (Anwendung der Definitionen)

1. für alle M und g: $\max([1 - [\forall x \neg P(x)]_g^M, [\neg\exists y P(y)]_g^M) = 1$
2. für alle M und g: $\max([1 - \min_{a \in E}([\neg P(x)]_{g[a/x]}^M), 1 - [\exists y P(y)]_g^M) = 1$
3. für alle M und g: $\max([1 - \min_{a \in E}(1 - [P(x)]_{g[a/x]}^M), 1 - [\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M)) = 1$
4. für alle M und g: $\max([\max_{a \in E}([P(x)]_{g[a/x]}^M), 1 - [\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M)) = 1$

Reduktion auf Mengentheorie

- die letzte Zeile besagt praktisch: für eine bestimmten Wahrheitswert α:

$$\max(\alpha, 1 - \alpha) = 1$$

- das ist natürlich immer wahr
- damit ist die ursprüngliche Formel eine Tautologie
- *Methode ist umständlich manchmal nicht sehr erhellend*

Gegenmodell-Methode

- alternative Methode: Konstruktion eines Gegenmodells
- Idee: indirekter Beweis
  - angenommen, die Formel ist keine Tautologie
  - das bedeutet, dass es ein Modell und eine Belegungsfunktion gibt, die die Formel falsch machen
  - man versucht, ein solche Modell (samt zugehöriger Belegungsfunktion) zu konstruieren
  - wenn dieser Versuch auf einen Widerspruch führt, muss die Formel eine Tautologie sein

Gegenmodell-Methode

- Angenommen: es gibt M und g, so dass $[\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists y P(y)]_g^M = 0$
- Also: $[\forall x \neg P(x)]_g^M = 1$ und $\neg \exists y P(y)]_g^M = 0$
- Also: $[\forall x \neg P(x)]_g^M = 1$ und $[\exists y P(y)]_g^M = 1$
- Also: $\min_{a \in E}([\neg P(x)]_{g[a/x]}^M) = 1$ und $\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M) = 1$
- Also: $\min_{a \in E}(1 - [P(x)]_{g[a/x]}^M) = 1$ und $\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M) = 1$
- Also: $\max_{a \in E}([P(x)]_{g[a/x]}^M) = 0$ und $\max_{b \in E}([P(y)]_{g[b/y]}^M) = 1$: **Widerspruch**

Gegenmodell-Methode

- Beispiel für Nicht-Tautologie:

$$\forall x \exists y Rxy$$

- Annahme: es gibt (Gegen-)Modell M und Belegung g so dass:
  - $[\forall x \exists y Rxy]_g^M = 0$
  - also: $\min_{a \in E}[\exists y Rxy]_{g[a/x]}^M] = 0$
  - also: für ein $a \in E$: $[\exists y Rxy]_{g[a/x]}^M] = 0$
  - also: $\max_{b \in E}[Rxy]_{g[a/x][b/y]}^M = 0$
  - also: für alle $b \in E$: $[Rxy]_{g[a/x][b/y]}^M = 0$
  - also: für alle $b \in E$: $\langle a, b \rangle \notin F(R)$

Gegenmodell-Methode

- einfachstes Modell, dass diese Bedingung erfüllt:
  - $M = \langle E, F \rangle$
  - $E = \{a\}$
  - $F(R) = \emptyset$
- Gegenmodell-Methode kan bis zu gewissem Grad mechanisiert werden:
- **Wahrheitsbaum-Methode für Prädikatenlogik**

Wahrheitsbaum-Kalkül für PL

- Alle Regeln des aussagenlogischen Wahrheitsbaum-Kalküls bleiben gültig
- es kommen vier neue Regeln hinzu, zwei pro Quantor

Regeln

- Allquantor

$$(\forall) \qquad \frac{\forall x \varphi}{[c/x]\varphi}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist, die im selben Ast **vorkommt**. Wenn in dem Ast noch keine Konstante vorkommt, kann c frei gewählt werden.

- Existenzquantor

$$(\exists) \qquad \frac{\exists x \varphi}{[c/x]\varphi}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist, die im selben Ast **nicht vorkommt**.

Regeln

- Negation + Allquantor

$$(Neg + \forall) \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\varphi \\ \hline [c/x]\neg\varphi \end{array}$$

wobei c eine Konstante ist, die weiter oben im selben Ast **nicht vorkommt**

- Negation + Existenzquantor

$$(Neg + \exists) \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\varphi \\ \hline [c/x]\neg\varphi \end{array}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist, die im selben Ast **vorkommt**. Wenn in dem Ast noch keine Konstante vorkommt, kann c frei gewählt werden.

Regeln

- Die Regeln $(\exists)$ sowie $(\neg\forall)$ dürfen auf eine Formel nur einmal angewandt werden.
- Die Regeln $(\forall)$ sowie $(\neg\exists)$ können für jede Konstante im jeweiligen Ast einmal angewandt werden
- Faustregel: wenn man die Wahl hat, immer zuerst $(\exists)$ und $(\neg\forall)$ anwenden, erst dann $(\forall)$ bzw. $(\neg\exists)$

Beispiele

1.	$\neg(\forall x \neg Px \rightarrow \neg\exists x Px)$	(A)
2.	$\forall x \neg Px$	(1)
3.	$\neg\neg\exists x Px$	(1)
4.	$\exists x Px$	(3)
5.	Pa	(4)
6.	$\neg Pa$	(2)
7.	x	$(5, 6)$

Die Annahme, dass $\forall x \neg Px \rightarrow \neg\exists x Px$ in einem Modell falsch, die Negation $\neg(\forall x \neg Px \rightarrow \neg\exists x Px)$ also wahr ist, hat zu einem Widerspruch geführt. Also ist die erstgenannte Formel eine Tautologie.

Beispiele

$$\begin{array}{lcc} 1. & \neg\forall x\exists y Rxy & (A) \\ 2. & \neg\exists y Ray & (1) \\ 3. & Raa & (2) \end{array}$$

Der Ast bleibt offen, obwohl keine Regeln mehr angewandt werden können. Die Formel $\forall x\exists y Rxy$ ist also keine Tautologie.

Folgerungen und Wahrheitsbäume

- logische Folgerungen können ebenfalls im Wahrheitsbaum-Kalkül bewiesen werden
- analog zur Aussagenlogik muss für einen indirekten Beweis einer Folgerung angenommen werden, dass
  - die Prämissen alle wahr sind, und
  - die Konklusion falsch ist
- also beginnt ein Wahrheitsbaum für eine Folgerung mit den Prämissen sowie der Negation der Konklusion als Annahmen

Beispiele

$$\forall x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$$

$$\begin{array}{lcr} 1. & \forall x P(x) & (A) \\ 2. & \neg\forall y P(y) & (A) \\ 3. & \neg P(a) & (2) \\ 4. & P(a) & (1) \\ 5. & \mathsf{x} & (3,4) \end{array}$$

Beispiele

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

$$\begin{array}{lcr}
1. & \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) & (A) \\
2. & \neg(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) & (A) \\
3. & \forall x P(x) & (2) \\
4. & \neg\forall x Q(x) & (2) \\
5. & \neg Q(a) & (4) \\
6. & P(a) & (3) \\
7. & P(a) \rightarrow Q(a) & (1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr|lcr}
8. & \neg P(a) & (7) & 9. & Q(a) & (7) \\
 & \text{x} & (6,8) & & \text{x} & (5,9)
\end{array}$$

Beispiele

$$\exists x P(x) \not\Rightarrow P(a)$$

1.	$\exists x P(x)$	(A)
2.	$\neg P(a)$	(A)
3.	$P(a)$	(1)
	x	$(2, 3)$

FALSCH!!

Beispiele

$$\exists x P(x) \not\Rightarrow P(a)$$

$$\begin{array}{lll} 1. & \exists x P(x) & (A) \\ 2. & \neg P(a) & (A) \\ 3. & P(b) & (1) \end{array}$$

RICHTIG

Beispiele

$$\exists x \forall y R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$$

$$\begin{array}{lcr}
1. & \exists x \forall y R(x,y) & (A) \\
2. & \neg \forall y \exists x R(x,y) & (A) \\
3. & \forall y R(a,y) & (1) \\
4. & \neg \exists x R(x,b) & (2) \\
5. & R(a,b) & (3) \\
6. & \neg R(a,b) & (4) \\
 & \mathsf{x} & (5,6)
\end{array}$$

Unentscheidbarkeit

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists x \forall y R(x, y)$$

$$\begin{array}{rcr}
1. & \neg\exists x \forall y R(x, y) & (A) \\
2. & \neg\forall y R(a, y) & (1) \\
3. & \neg R(a, b) & (2) \\
4. & \neg\forall y R(b, y) & (1) \\
5. & \neg R(b, c) & (2) \\
6. & \neg\forall y R(c, y) & (1) \\
7. & \neg R(c, d) & (2) \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Unentscheidbarkeit

- Ast ließe sich beliebig lange fortsetzen, ohne je auf einen Widerspruch zu stoßen
- generell gilt:
  - nur logische Folgerungen lassen sich im Wahrheitsbaum-Verfahren beweisen (Korrektheit des Verfahrens)
  - für jede logische Folgerung gibt es einen Beweis im Wahrheitsbaum-Verfahren (Vollständigkeit des Verfahrens
  - es gibt aber keine Garantie, dass man eine Nicht-Folgerung als solche erkennt
  - Verfahren kann im Prinzip unendlich lange ohne Ergebnis laufen

Unentscheidbarkeit

- es gibt auch kein anderes mechanisches Verfahren, das es erlaubt, Folgerungen von Nicht-Folgerungen garantiert zu Unterscheiden (Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik)