Übungsklausur Formale Methoden 2

Universität Bielefeld

9. Juni 2005

Aufgabe 1 Symbolisieren Sie die folgenden Sätze in aussagenlogischer Übersetzung.

a) Thomas Mann schrieb die „Buddenbrooks“, nicht den „Professor Unrat“.
$p \wedge \neg q$

b) Wenn Hans in Bielefeld wohnt, dann wohnt er in NRW.
$p \rightarrow q$

c) Das Gesetz ist genau dann beschlossen, wenn die einfache Mehrheit der abgegebenen Stimmen Ja-Stimmen sind.
$p \leftrightarrow q$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie durch die Wahrheitstafel-Methode, ob die folgenden Formeln Tautologien, Kontradiktionen, oder keines von beiden sind.

a) $\neg(p \wedge \neg p)$ Tautologie

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	0	0	1
0	1	0	1

b) $(p \to q) \leftrightarrow p \land \neg q$ Kontradiktion

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \to q) \leftrightarrow p \land \neg q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0

c) $(p \to r) \to (q \to r) \to p \lor q \to r$ Tautologie

p	q	r	$p \lor q$	$p \to r$	$q \to r$	$p \lor q \to r$	$(q \to r) \to p \lor q \to r$	$(p \to r) \to (q \to r) \to p \lor q \to r$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

d) $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$ Kontradiktion

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$((p \to q) \to p) \to p$	$\neg(((p \to q) \to p) \to p)$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0

e) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \lor q) \to r)$ weder Tautologie noch Kontradiktion

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \lor q) \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

f) $((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to q)$ Tautologie

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$(p \to q) \to q$	$((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

(*Hinweis:* Eine Formel ist genau dann eine Kontradiktion, wenn ihre Negation eine Tautologie ist.)

Aufgabe 3 Bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrheitsbaum-Methode, ob die Formeln aus Aufgabe 2 Tautologien, Kontradiktionen, oder keines von beiden sind.

Aufgabe 3a)

1.	$\neg\neg(p \wedge \neg p)$	(A)
2.	$p \wedge \neg p$	(1)
3.	p	(2)
4.	$\neg p$	(2)
	$\times$	(2,3)

3b)

1.	$\neg\neg((p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q)$	(A)
2.	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$	(1)

3.	$p \rightarrow q$	(2)
4.	$p \wedge \neg q$	(2)
7.	p	(4)
8.	$\neg q$	(4)
9.	$\neg p$	(3)
	$\times$	(7,9)
10.	q	(3)
	$\times$	(8,10

5.	$\neg(p \rightarrow q)$	(2)
6.	$\neg(p \wedge \neg q)$	(2)
11.	p	(5)
12.	$\neg q$	(5)
13.	$\neg p$	(6)
	$\times$	(11,13)
14.	$\neg\neg q$	(6)
	$\times$	(12,14)

3 c)

1. $\neg((p \to r) \to (q \to r) \to p \vee q \to r))$ (A)

2. $p \to r$ (1)

3. $\neg((q \to r) \to p \vee q \to r)$ (1)

4. $q \to r$ (3)

5. $\neg(p \vee q \to r)$ (3)

6. $p \vee q$ (5)

7. $\neg r$ (5)

8. $\neg p$ (2) 9. r (2)

$\times$ (7, 9)

10. $\neg q$ (4) 11. r (4)

$\times$ (7, 11)

12. p (6) 13. q (6)

$\times$ (8, 12) $\times$ (10, 13)

3d)

1.	$\neg\neg\neg(((p \to q) \to p) \to p)$	(A)
2.	$\neg(((p \to q) \to p) \to p)$	(1)
3.	$\neg((p \to q) \to p)$	(2)
4.	$\neg p$	(2)
5.	$\neg(p \to q)$	(3)
6.	p	(3)
	$\times$	(4, 6)

3e) Annahme: Formel ist Tautologie

1. $\neg((p \to (q \to r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \to r))$ (A)

2. $p \to (q \to r)$ (1)

3. $\neg(p \vee q \to r)$ (1)

4. $\neg(p \to (q \to r))$ (1)

5. $(p \vee q) \to r$ (1)

6. $p \vee q$ (3)

7. $\neg r$ (3)

8. p (6)

9. q (6)

10. $\neg p$ (2)

11. $q \to r$ (2)

Ast bleibt offen!

3 e) Annahme: Formel ist Kontradiktion

1. $\neg\neg((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \lor q) \rightarrow r)$ (A)

2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \lor q) \rightarrow r)$ (1)

3. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (2)

4. $(p \lor q) \rightarrow r$ (2)

5. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ (2)

6. $\neg((p \lor q) \rightarrow r)$ (2)

7. $\neg p$ (3)

8. $q \rightarrow r$ (3)

9. $\neg(p \lor q)$ (4)

10. r (4)

Ast bleibt offen!

3f)

1. $\neg((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to q)$ (A)

2. $(p \to q) \to p$ (1)

3. $\neg((p \to q) \to q)$ (1)

4. $p \to q$ (3)

5. $\neg q$ (4)

6. $\neg p$ (4) 7. q (4)

× (5,7)

8. $\neg(p \to q)$ (2) 9. p (2)

10. p (8) × (6,9)

× (6,10)

Aufgabe 4 Für die Formeln aus Aufgabe 2, die Tautologien sind: beweisen Sie sie mit Hilfe des Kalküls des natürlichen Schließens!

4a)

$1. p \wedge \neg q$	(A)
$2. p$	$B \wedge 1; 1$
$3. \neg p$	$B \wedge 2; 1$
$4. \neg(p \wedge \neg p)$	$E\neg; 1, 2, 3$

4c)

$1. p \to r \qquad (A)$

$2. q \to r \qquad (A)$

$3. p \lor q \qquad (A)$

$4. p \qquad (A)$

$5. r \qquad B \to; 1, 3$

$6. q \qquad (A)$

$7. r \qquad B \to; 2, 6$

$8. r \qquad B\lor; 2, 4, 6, 7$

$9. p \lor q \to r \qquad E \to; 3, 8$

$10. (q \to r) \to p \lor q \to r \qquad E \to; 2, 9$

$11. (p \to r) \to (q \to r) \to p \lor q \to r \qquad E \to; 1, 10$

4f)

$1. (p \to q) \to p \qquad (A)$

$2. p \to q \qquad (A)$

$3. p \qquad B \to; 1, 2$

$4. q \qquad B \to; 2, 3$

$5. (p \to q) \to q \qquad E \to; 2, 4$

$6. ((p \to q) \to p) \to (p \to q) \to q \qquad E \to; 1, 5$