

# Übungsklausur Formale Methoden 2

Universität Bielefeld

9. Juni 2005

**Aufgabe 1** Symbolisieren Sie die folgenden Sätze in aussagenlogischer Übersetzung.

a) Thomas Mann schrieb die „Buddenbrooks“, nicht den „Professor Unrat“.

$$p \wedge \neg q$$

b) Wenn Hans in Bielefeld wohnt, dann wohnt er in NRW.

$$p \rightarrow q$$

c) Das Gesetz ist genau dann beschlossen, wenn die einfache Mehrheit der abgegebenen Stimmen Ja-Stimmen sind.

$$p \leftrightarrow q$$

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie durch die Wahrheitstafel-Methode, ob die folgenden Formeln Tautologien, Kontradiktionen, oder keines von beiden sind.

a)  $\neg(p \wedge \neg p)$  Tautologie

$p$	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	0	0	1
0	1	0	1

b)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$  Kontradiktion

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0

c)  $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r$  Tautologie

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$	$(q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

d)  $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$  Kontradiktion

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$	$\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0

e)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$  weder Tautologie noch Kontradiktion

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

f)  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$  Tautologie

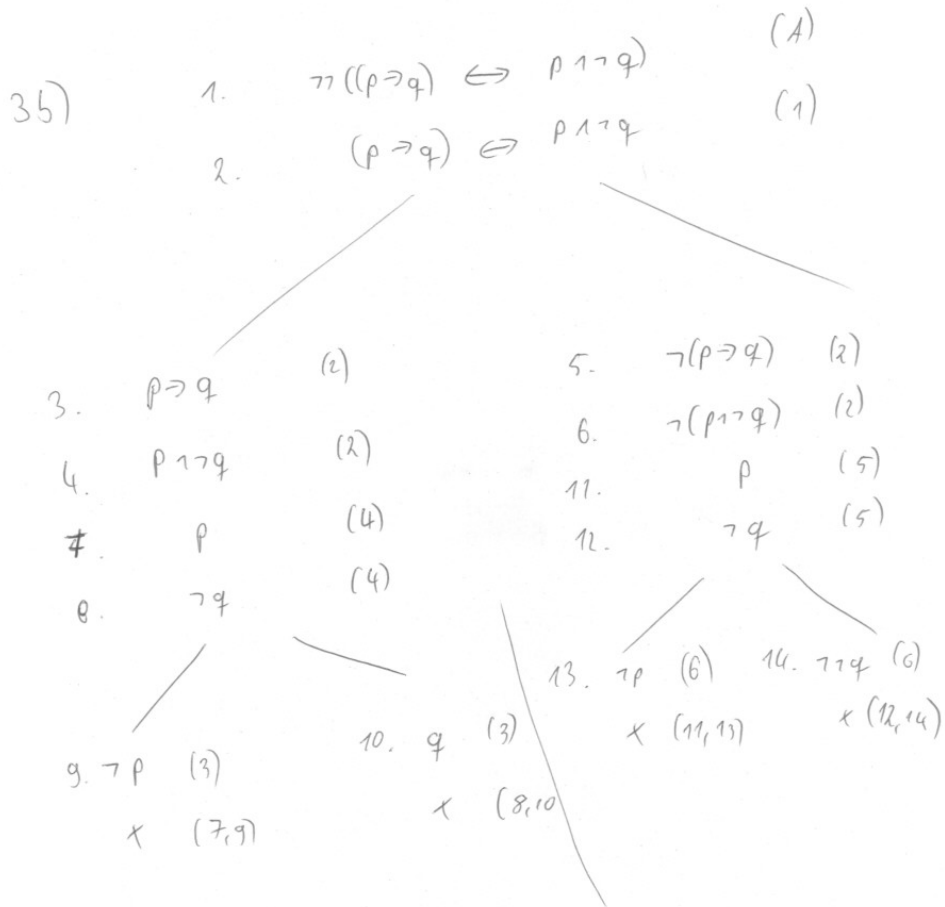
$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

(*Hinweis:* Eine Formel ist genau dann eine Kontradiktion, wenn ihre Negation eine Tautologie ist.)

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrheitsbaum-Methode, ob die Formeln aus Aufgabe 2 Tautologien, Kontradiktionen, oder keines von beiden sind.

Aufgabe 3a)

- |    |                             |       |
|----|-----------------------------|-------|
| 1. | $\neg\neg(p \wedge \neg p)$ | (A)   |
| 2. | $p \wedge \neg p$           | (1)   |
| 3. | $p$                         | (2)   |
| 4. | $\neg p$                    | (2)   |
|    | $\perp$                     | (2,3) |



3c)

1.  $\neg((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r)$  (1)

2.  $p \rightarrow r$  (1)

3.  $\neg((q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r)$  (1)

4.  $q \rightarrow r$  (3)

5.  $\neg(p \vee q \rightarrow r)$  (3)

6.  $p \vee q$  (5)

7.  $\neg r$  (5)

8.  $\neg p$  (2)

9.  $r$  (2)

x (7,9)

10.  $\neg q$  (4)

11.  $r$  (4)

x (7,11)

12.  $p$  (6)

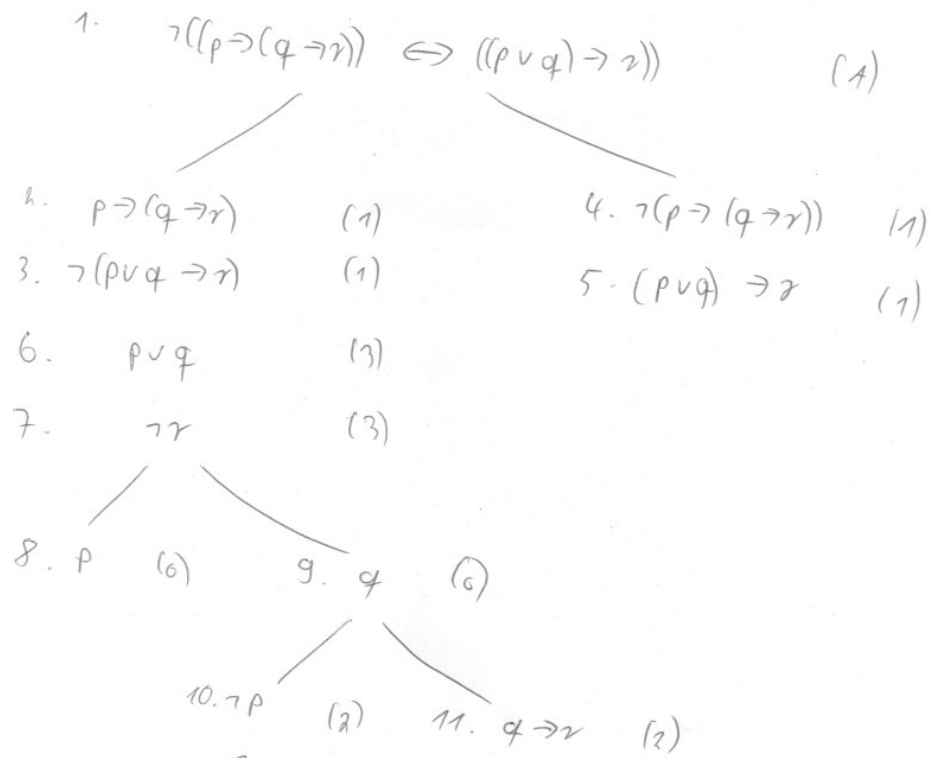
13.  $q$  (6)

x (8,12)

x (10,13)

3d)	1.	$\neg\neg\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$	(A)
	2.	$\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$	(1)
	3.	$\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$	(2)
	4.	$p$	(2)
	5.	$\neg(p \rightarrow q)$	(3)
	6.	$p$	(3)
		$\times$	(4,6)

3e) Annahme: Formel ist Tautologie



ist nicht  
offen  $\nabla$

3 e) Annahme: Formel ist Kontradiktions

1.  $\neg((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) \quad (A)$

2.  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \ominus ((p \vee q) \rightarrow r) \quad (1)$

3.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad (2)$

5.  $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad (2)$

4.  $(p \vee q) \rightarrow r \quad (2)$

6.  $\neg((p \vee q) \rightarrow r) \quad (2)$

7.  $\neg p \quad (3)$

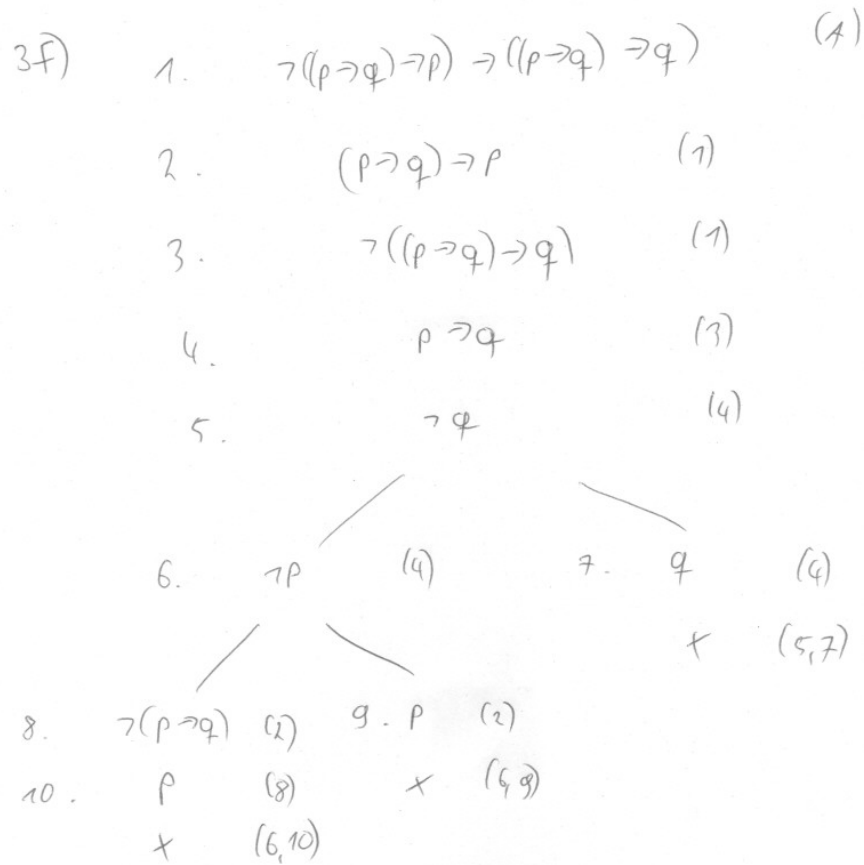
8.  $q \rightarrow r \quad (3)$

9.  $\neg(p \vee q) \quad (4)$

10.  $r \quad (4)$

↑  
ist bleibt  
offen!





**Aufgabe 4** Für die Formeln aus Aufgabe 2, die Tautologien sind: beweisen Sie sie mit Hilfe des Kalküls des natürlichen Schließens!

4a)

1.	$p \wedge \neg q$	(A)
2.	$p$	$B \wedge 1; 1$
3.	$\neg p$	$B \wedge 2; 1$
4.	$\neg(p \wedge \neg p)$	$E\neg; 1, 2, 3$

4c)

1. $p \rightarrow r$ (A)
2. $q \rightarrow r$ (A)
3. $p \vee q$ (A)
4. $p$ (A)
5. $r$ $B \rightarrow$ ; 1, 3
6. $q$ (A)
7. $r$ $B \rightarrow$ ; 2, 6
8. $r$ $B \vee$ ; 2, 4, 6, 7
9. $p \vee q \rightarrow r$ $E \rightarrow$ ; 3, 8
10. $(q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r$ $E \rightarrow$ ; 2, 9
11. $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \vee q \rightarrow r$ $E \rightarrow$ ; 1, 10

4f)

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ (A)
2. $p \rightarrow q$ (A)
3. $p$ $B \rightarrow$ ; 1, 2
4. $q$ $B \rightarrow$ ; 2, 3
5. $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ $E \rightarrow$ ; 2, 4
6. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$ $E \rightarrow$ ; 1, 5