Semantik und Pragmatik

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 10, 24. Juni 2005

Gerhard Jäger

Beschränkte Quantifikation

- Quantifikation in natürlicher Sprache ist normalerweise **beschränkt**

*Alle **Menschen** sind sterblich.*
*Einige **Griechen** sind Philosophen.*

- logische Quantoren sind im Prinzip **unbeschränkt**

*für jedes **Ding**, es gibt ein **Ding***

- Beschränkung des Allquantors wird durch **Implikation** übersetzt

$$\forall x(\text{MENSCH'}(x) \rightarrow \text{STERBLICH'}(x)$$

- Beschränkung des Existenzquantors wird durch **Konjunktion** übersetzt

$$\exists x(\text{GRIECHE'}(x) \wedge \text{PHILOSOPH'}(x))$$

Mehrfach-Quantifikation

- Ein Satz kann mehrere quantifizierende Ausdrücke enthalten

(1) a. Jeder Mann liebt jedes Gericht.
b. Alle Kinder lesen alle Bücher.
c. Einige Kinder gaben einem Gast einen Bonbon.

- entsprechend enthält die Übersetzung mehrere Quantoren

(2) a. $\forall x(\text{MANN'}(x) \rightarrow \forall y(\text{GERICHT'}(y) \rightarrow \text{LIEBT'}(y)(x)))$
b. $\forall x(\text{KIND'}(x) \rightarrow \forall y(\text{BUCH'}(y) \rightarrow \text{LIEST'}(y)(x)))$
c. $\exists x(\text{KIND'}(x) \wedge \exists y(\text{GAST'}(y) \wedge \exists z(\text{BONBON'}(z) \wedge \text{GAB'}(y)(z)(x))))$

Faustregeln für die Übersetzung

- gegeben: deutscher Satz S, dessen Übersetzung Quantoren benötigt
- paraphrasiere S so, dass er mit *für alle P gilt, dass* oder *es gibt ein P dass ...* beginnt („P“ steht für ein Substantiv)
- übersetze als

  $$\forall x(P(x) \rightarrow ...)$$

  bzw.

  $$\exists x(P(x) \wedge ...)$$

  („P“ ist die Übersetzung des fraglichen Substantives)
- übersetze den Rest des Satzes

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.

(3) a. Löwen haben eine Mähne.

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.
    b. Für jeden Sanftmütigen gilt: er ist selig.

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.
    b. Für jeden Menschen gilt: er betrügt sich selbst.

(3) a. Löwen haben eine Mähne.
    b. Für jeden Löwen gilt: es gibt eine Mähne, so dass er sie hat.

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.

b. Für jeden Sanftmütigen gilt: er ist selig.

c. $\forall x(\text{SANFTMUETIG'}(x) \rightarrow \text{SELIG'}(x))$

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.

b. Für jeden Menschen gilt: er betrügt sich selbst.

c. $\forall x(\text{MENSCH'}(x) \rightarrow \text{BETRUEGT'}(x, x))$

(3) a. Löwen haben eine Mähne.

b. Für jeden Löwen gilt: es gibt eine Mähne, so dass er sie hat.

c. $\forall y(\text{LOEWE'}(y) \rightarrow \exists w(\text{MAEHNE'}(w) \wedge \text{HAT'}(y, w)))$

Skopusambiguität

- Sätze mit mehreren Quantoren können **mehrdeutig** (Fachausdruck: **ambig**) sein
- Ausdrücke der Typentheorie sind nie mehrdeutig
- Ambige Sätze haben deshalb mehrere Übersetzungen

Jeder Mann liebt eine Frau.

$\forall x(\text{MANN'}(x) \rightarrow \exists y(\text{FRAU'}(y) \wedge \text{LIEBT'}(y)(x)))$ $\exists y(\text{FRAU'}(y) \wedge \forall x(\text{MANN'}(y) \rightarrow \text{LIEBT'}(y)(x)))$

Typentheorie mit Quantifikation: Syntax

Definition 1 (Syntax der Typentheorie, dritte Version)

1. *Von jedem Typ gibt es unendlich viele Variablen.*
2. *Von jedem Typ gibt es unendlich viele Konstanten.*
3. *Eine Konstante oder Variable eines Typs ist ein Ausdruck dieses Typs.*
4. *Wenn φ und ψ Ausdrücke vom Typ t sind, dann sind $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ auch Ausdrücke vom Typ t.*
5. *Wenn α ein Ausdruck vom Typ $\langle a, b\rangle$ ist und β ein Ausdruck vom Typ a, dann ist ein Ausdruck $\alpha(\beta)$ vom Typ b.*
6. *Wenn v eine Variable ist und φ ein Ausdruck vom Typ t, dann sind $\forall v(\varphi)$ und $\exists v(\varphi)$ ebenfalls Ausdrücke vom Typ t.*
7. *Nichts sonst ist ein Ausdruck.*

Syntax der Typentheorie: Konventionen

- Es gelten die selben Klammerkonventionen wie in der Aussagenlogik
- Außerdem gilt, dass $\forall v$ und $\exists v$ starker binden als alle anderen Operatoren

$$\forall x Px \wedge Qx$$

steht also für

$$\forall x(P(x)) \wedge Q(x)$$

nicht für

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

Freie und gebundene Variablen

- man unterscheidet **freie** und gebundene Vorkommen von Variablen in eine Formel
- gebundene Vorkommen von einer Variablen in einer Formel sind immer **von einem bestimmten Quantor** gebunden

Freie und gebundene Variablen

Definition 2 (Freie und gebundene Variablen-Vorkommen)

- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist auch frei in $\neg\varphi$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ und ψ ist auch frei in $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist auch frei in $\forall w(\varphi)$ und $\exists w(\varphi)$, wenn $v \neq w$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in α und β ist auch frei in $\alpha(\beta)$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist*
  - *in $\forall v(\varphi)$ durch $\forall v$ gebunden, und*
  - *in $\exists v(\varphi)$ durch $\exists v$ gebunden.*

Gebundene Variablen und Skopus

- die Formel innerhalb des Klammerpaares nach einem Quantor heißt der **Skopus des Quantors**
- Beispiele (Quantor in blau, Skopus des Quantors in rot)

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge Q(x)$$
$$\exists x(R(x)) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\exists x(R(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$$

- Ein Quantor Q bindet ein Variablenvorkommen v gdw.
  - v im Skopus von Q steht, und
  - zwischen Q und v kein weiterer **gleichnamiger** Quantor steht, der v bindet

Noch ein Beispielmodell

$$\begin{aligned}
M &= \langle E, F \rangle \\
E &= \{\textbf{DOG, CAT, MAN}_1\textbf{, MAN}_2\textbf{, WOMAN}_1\textbf{,} \\
&\quad \textbf{WOMAN}_2\textbf{, CAKE, MOUSE}\} \\
F(\text{JO'}) &= \textbf{MAN}_1 \\
F(\text{BERTIE'}) &= \textbf{MAN}_2 \\
F(\text{ETHEL'}) &= \textbf{WOMAN}_1 \\
F(\text{FIONA'}) &= \textbf{WOMAN}_2 \\
F(\text{CHESTER'}) &= \textbf{DOG} \\
F(\text{PRUDENCE'}) &= \textbf{CAT}
\end{aligned}$$

Noch ein Beispielmodell

$$
\begin{array}{rcl}
F(\text{ANIMAL'}) & = & \{\textbf{DOG, CAT, MOUSE}\} \\
F(\text{RUN'}) & = & \{\textbf{DOG, CAT}\} \\
F(\text{LAUGH'}) & = & \{\textbf{MAN}_1\textbf{, WOMAN}_1\} \\
F(\text{HOWL'}) & = & \{\textbf{DOG}\} \\
F(\text{SING'}) & = & \{\textbf{WOMAN}_2\} \\
F(\text{SCREAM'}) & = & \emptyset \\
F(\text{SQUEAK'}) & = & \{\textbf{MOUSE}\} \\
F(\text{CRAZY'}) & = & \emptyset \\
F(\text{POISON'}) & = & \{\langle\textbf{CAKE, DOG}\rangle\} \\
F(\text{EAT'}) & = & \{\langle\textbf{DOG, CAKE}\rangle\}
\end{array}
$$

Allquantor: Interpretation

- **Notationskonvention:**

$$[t/v]\varphi$$

ist die Formel, die wie φ ist, abgesehen davon, dass alle **freien** Vorkommen der Variablen v durch t ersetzt wurden

Allquantor: Interpretation

- Intuition:

  $$\forall v \varphi$$

  ist wahr genau dann wenn $[c/v]\varphi$ wahr ist für alle Konstanten c

- Aber: in unserem Modell gilt

  $$\text{ANIMAL'}(c) \rightarrow \text{RUN'}(c)$$

  für alle Konstanten c; dennoch ist

  $$\forall x(\text{ANIMAL'}(x) \rightarrow \text{RUN'}(x))$$

  falsch!

- Grund: die Maus „hat keinen Namen“

Allquantor: Interpretation

- besserer Ansatz: damit

$$\forall x(\text{ANIMAL'}(x) \longrightarrow \text{RUN'}(x))$$

  wahr ist, muss

$$\text{ANIMAL'}(x) \rightarrow \text{RUN'}(x)$$

  wahr sein, egal, worauf sich x bezieht!
- Angenommen, $g(x) = \mathbf{MOUSE}$
- dann:

$$[\text{ANIMAL'}(x) \rightarrow \text{RUN'}(x)]_g^M = 0$$

Allquantor: Interpretation

- Vielleicht so:

$$[\forall v(\varphi)]^M = 1$$

genau dann wenn für alle g:

$$[\varphi]^M_g = 1$$

- Aber was ist dann mit Formeln wie

$$\forall x \neg \forall y \text{POISON'}(x, y)$$

Allquantor: Interpretation

- zwei Probleme:
  - auch quantifizierte Formeln können freie Variablen enthalten; also muss auch die Interpretation von quantifizierten Formeln von der Belegungsfunktion abhängen
  - nicht die komplette Belegungsfunktion darf variiert werden, sondern nur die Interpretation der gebundenen Variablen

Allquantor: Interpretation

- Notation:
  - sei $a \in E$ eine Objekt des Modells, v eine Variable und g eine Belegungsfunktion
  - $g[a/v]$: die Belegungsfunktion, die genau wie g ist, außer dass

$$g[a/v](v) = a$$

- endgültige Version: Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell.

$$[\forall v(\varphi)]_g^M = 1$$

genau dann wenn

$$[\varphi]_{g[a/v]}^M = 1$$

für alle $a \in E$