Semantik und Pragmatik

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 7, 27. Mai 2005

Gerhard Jäger

Beispiele

SCREAM'	BERTIE'	SCREAM'(BERTIE')
$\langle e, t \rangle$	e	t
LOATHE'	PRUDENCE'	LOATHE'(PRUDENCE')
$\langle e, \langle e, t \rangle\rangle$	e	$\langle e, t \rangle$
GIVE'	BERTIE'	GIVE'(BERTIE')
$\langle e, \langle e, \langle e, t \rangle\rangle\rangle$	e	$\langle e, \langle e, t \rangle\rangle$
GIVE'(BERTIE')	THE-CAKE'	GIVE'(BERTIE')(THE-CAKE')
$\langle e, \langle e, t \rangle\rangle$	e	$\langle e, t \rangle$

Interpretation der Typentheorie

- „Funktionsanwendung“ (als syntaktische Operation der Typentheorie) wird interpretiert als Funktionsanwendung (im mengentheoretischen Sinne)
- also:
  - werden Ausdrücke mit komplexen Typen als Funktionen interpretiert
  - determinert der Typ eines Funktors den Definitions- und Bereich seiner Interpretation

Interpretation der Typentheorie

Bereiche

- Jedem Typ wird eine Menge von möglichen Bedeutung zugeordent
- Diese Menge heißt **Bereich** des Typs (engl. *domain*)
- Bereiche sind auf konkretes Modell bezogen.

Bereiche

Definition 1 (Bereiche)
Sei ein Individuenbereich E gegeben.

1. $Dom(e) = E$
2. $Dom(t) = \{0, 1\}$
3. $Dom(\langle a, b\rangle) = Dom(b)^{Dom(a)}$

- Notation: A^B: Menge der Funktionen mit Definitionsbereich B und Bereich A

Beispiele

- $Dom(\langle e,t\rangle) = Dom(t)^{Dom(e)} = \{0,1\}^E$
- in Worten: Menge der Funktionen aus dem Individuenbereich in die Wahrheitswerte
- derartige Funktionen heißen **charakteristische Funktionen** („charakterisieren“ alles in ihrem Definitionsbereich als „wahr“ (gehört dazu) oder „falsch“ (gehört nicht dazu))
- charakteristische Funktion f kann mit $\{x|f(x) = 1\}$ identifiziert werden
- deshalb leicht vereinfacht: $Dom(\langle e,t\rangle) = POW(E)$ (die Potenzmenge von E)

Beispiele

- $Dom(\langle e, \langle e, t\rangle\rangle) = POW(E)^E$
- in Worten: Menge der Funktion von E in Teilmengen von E
- kann mit Menge der zweistelligen Relationen über E identifiziert werden
- analog für n-stellige Prädikate

Modelle für Typentheorie

- Modell besteht wieder aus zwei Komponenten:
  - Individuenbereich E
  - Interpretationsfunktion F, die Konstanten auf Bedeutungen abbildet
- im Unterschied zur Prädikatenlogik gibt es jetzt Konstanten von beliebig komplexem Typ

Modelle für Typentheorie

Definition 2 (Modell für Typentheorie) $M = \langle E, F \rangle$ *ist ein Modell für die Typentheorie gdw.*

- E *eine nicht-leere Menge ist (der Individuenbereich), und*
- F *eine Funktion ist, so dass für jeden Typ* a *und jede Konstante* α *vom Typ* a*:* $F(\alpha) \in Dom(a)$*.*

Interpretation der Typentheorie

- auf Basis eines Modells kann rekursiv eine Interpretation für alle Ausdrücke der Typentheorie definiert werden

Interpretation der Typentheorie

Definition 3 (Interpretation der Typentheorie) *Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell für die Typentheorie.*

- $[\alpha]^M = F(\alpha)$*, wenn α eine Konstante ist*
- $[\neg\varphi]^M = 1 - [\varphi]^M$
- $[\varphi \wedge \psi]^M = \min([\varphi]^M, [\psi]^M)$
- $[\varphi \vee \psi]^M = \max([\varphi]^M, [\psi]^M)$
- $[\varphi \rightarrow \psi]^M = \max(1 - [\varphi]^M, [\psi]^M)$
- $[\varphi \leftrightarrow \psi]^M = 1 - ([\varphi]^M - [\psi]^M)^2$
- $[\alpha(\beta)]^M = [\alpha]^M([\beta]^M)$

Interpretation der Typentheorie

Theorem 1 *Für jeden Typ a, für jeden Ausdruck der Typentheorie α von Typ a, und für jedes Modell M gilt:*

$$[\alpha]^M \in Dom(a)$$

Beweis: Induktion über den syntaktischen Aufbau von α.