Semantik und Pragmatik

22. Mai 2006

Gerhard Jäger

Lambda-Notation mit Angabe des Definitionsbereichs

- Funktionen haben Definitionsbereich:

$$\{\langle x, x^2\rangle | x \in N\} \neq \{\langle x, x^2\rangle | x \in R\}$$

- Notation $\lambda x.x^2$ deshalb unvollständig
- vollständige Notation: Angabe des Definitionsbereichs im Lambda-Präfix:
    - $\lambda x \in N.(x^2)$
    - $\lambda x \in R.(x^2)$
- allgemeines Format:
  λ Variable $\in$ Definitionsbereich.(Beschreibung des Wertes der Variable)

Lambda-Notation

Lambda-Notation mit Angabe des Definitionsbereichs

- Beispiel
  - $(\lambda x \in R.(x^2 + 3x + 2))(-10) = 72$
  - $(\lambda x \in N.(x^2 + 3x + 2))(-10)$ ist nicht definiert
- Angabe des Definitionsbereichs sowie Klammern um Beschreibung des Wertes werden häufig weggelassen, wenn dadurch keine Ambiguität auftritt

Lambda-Notation

Variablen-Konventionen

- Schreibweise mit explizitem Definitionsbereich ist umständlich
- Vereinfachung durch Variablen-Konventionen:
  - Jeder Variablen-Name ist per Konvention mit bestimmten Definitionsbereich assoziiert:
    - $x, y, z, \ldots$: E (Menge der Individuen)
    - $s, s', s_1, s_2, \ldots$: S (Menge der Situationen)
    - $P, Q, P', \ldots$: $S \times E$ (Menge der Relationen zwischen Situationen und Individuen)
    - $R, S, \ldots$: $S \times E \times E$ (Menge der Relationen zwischen Situationen und Paaren von Individuen)
    - $p, q, \ldots$: $POW(S)$ (Menge der Mengen von Situationen)

Lambda-Notation

Variablen-Konventionen

- soweit nicht anders angegeben, wird implizit angenommen, dass jede Variable nur in dem Bereich Werte nehmen kann, mit dem der Variablenname assoziiert ist
- es gilt also:

  $\lambda x.\phi$ ist eine Abkürzung für $\lambda x \in E.\phi$
  $\lambda s'.\phi$ ist eine Abkürzung für $\lambda s' \in S.\phi$
  $\lambda P.\phi$ ist eine Abkürzung für $\lambda P \in S \times E.\phi$
  $\lambda p.\phi$ ist eine Abkürzung für $\lambda p \in POW(S).\phi$
  usw.

Lambda-Notation

Funktionen mit Funktionen als Argumente

- Argument einer Funktion kann komplex sein:
  - Argument ist eine Menge
    - $\lambda X \in POW(N).(X \cap \{1,2,3\})$
    - $(\lambda X \in POW(N).(X \cap \{1,2,3\}))(\{2,3,4\}) = \{2,3,4\} \cap \{1,2,3\} = \{2,3\}$
    - $(\lambda X \in POW(N).(X \cap \{1,2,3\}))(\{4,5,6\}) = \{4,5,6\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
    - $(\lambda X \in POW(N).(X \cap \{1,2,3\}))(Isaak)$ ist nicht definiert
  - Argument ist selbst eine Funktion
    - $\lambda f \in N \mapsto N.(f(3))$
    - $(\lambda f \in N \mapsto N.(f(3)))(\lambda x \in N.(x^2)) = (\lambda x \in N.x^2)(3) = 3^2 = 9$

Funktionen mit Funktionen als Argumente

Weitere Beispiele:

$$
\begin{aligned}
(\lambda f.(f(3)+f(4)))(\lambda x.x^2+x+1) &= (\lambda x.x^2+x+1)(3)+(\lambda x.x^2+x+1)(4)\\
&= 3^2+3+1+4^2+4+1\\
&= 34
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda f.f(f(3)-9))(\lambda x.x^2+x+1) &= (\lambda x.x^2+x+1)((\lambda x.x^2+x+1)(3)-9)\\
&= (\lambda x.x^2+x+1)((3^2+3+1)-9)\\
&= (\lambda x.x^2+x+1)(4)\\
&= 4^2+4+1\\
&= 21
\end{aligned}
$$

Funktionen mit Funktionen als Wert
Gleichermaßen können Funktionen auch Werte haben, die wieder Funktionen sind, z.B.

- $\lambda x \lambda y . x + y$
  - $((\lambda x(\lambda y . x + y))(2))(3) =$
  - $= (\lambda y . 2 + y)(3)$
  - $= 2 + 3 = 5$
- in der Notation haben solche funktionswertige Funktionen mehrere Lambda-Operatoren hintereinander
- es gilt die Konvention:
  - Lambda-Operatoren werden von links nach rechts geklammert
  - Argumente werden von rechts nach links geklammert
  - erstes Lambda gehört zu erstem Argument, zweites Lambda zu zweitem Argument usw.

Funktionen mit Funktionen als Wert

$$(\lambda x_1. \cdots .\lambda x_n.\alpha)(a_1)\cdots(c_n)$$

ist eine Abkürzung für

$$(((\lambda x_1.(\cdots .(\lambda x_n.(\alpha)(a_1))))\cdots)(c_n))$$

Lambda-Notation

Skopus, Variablenbindung, Variablenumbenennung

- λ-Operator verhält sich in vielerlei Hinsicht wie ein Quantor in der Prädikatenlogik
- wie in der Prädikatenlogik ist die Wahl des Variablennamens unwesentlich:

$$\begin{aligned} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) &= \forall y(P(y) \rightarrow Q(y)) \\ \lambda x.x^2 + 3x + 4 &= \lambda w.w^2 + 3w + 4 \end{aligned}$$

- wichtig ist nur welche Variablenvorkommen gleichnamig sind und welche ungleichnamig

Skopus, Variablenbindung, Variablenumbenennung

- **Skopus** eines Lambda-Operators: Ausdruck in Klammern, der der Variable und dem Punkt folgt

$$(\lambda f.\underbrace{f(f(3)-9)})(\lambda x.\underbrace{x^2+x+1})$$

- alle freien Vorkommen der Variablen, die nach dem λ steht, im Skopus des λ-Operators werden durch den Operator **gebunden**
- eine Variable, die nicht gebunden ist (weder durch ein λ noch durch einen Quantor), heißt **frei**
- Eine Variable im λ-Operator kann umbenannt werden, wenn
  - alle Variablenvorkommen, die durch den Operator gebunden werden, ebenfalls umbenannt werden
  - die Bindungsrelationen dadurch nicht zerstört werden

Lambda-Notation

Charakteristische Funktionen in Lambda-Notation

- Charakteristische Funktion χ_M einer Menge M:
  - Wertebereich: $\{0, 1\}$
  - Bildungsvorschrift: $\chi_M(x) = 1$ gdw. $x \in M$, sonst 0
- Bedeutung von meta-sprachlichen Sätzen ist immer „wahr“ (bzw. 1) oder „falsch“ (bzw. 0)
- deshalb kann charakteristische Funktion als λ-Term ausgedrückt werden:

$$\lambda x.x \in M$$

- Beispiel:
  - angenommen, $M = \{x | x \textit{ ist ein Mensch}\}$
  - dann: $\chi_M = \lambda x.x \textit{ ist ein Mensch}$

Mengen können generell als Lambda-Terme dargestellt werden.

Lambda-Notation

Darstellung von Bedeutungen in Lambda-Notation

- Ob ein Individuum eine Eigenschaft hat oder nicht, ist situationsabhängig
- Situationsabhängigkeit muss deshalb in lexikalischer Bedeutung verankert sein:
    - $\|Pferd\| = \lambda x \lambda s.x \text{ ist ein Pferd in } s$
    - $\|rot\| = \lambda x \lambda s.x \text{ ist rot in } s$
    - $\|spricht\| = \lambda x \lambda s.x \text{ spricht in } s$
    - $\|Peter\ spricht\| = \lambda s.\text{Peter spricht in } s$

Kompositionalität

- Satzbedeutung = lexikalische Bedeutungen + Syntax
- Beispiel:
  Peter spricht.
  - Satzbedeutung: λs.Peter spricht in s
  - lexikalische Bedeutungen:
    - $\|Peter\|$ = Peter
    - $\|spricht\| = \lambda x \lambda s.x$ spricht in s
  - Syntax: $[_S\ [_{NP}\ [_N\ Peter\ ]\ ]\ [_{VP}\ [_V\ spricht\ ]\ ]\ ]$

Kompositionalität

S:$\lambda s.$Peter spricht in s

NP:Peter VP:$\lambda x \lambda s.x$ spricht in s

N:Peter V:$\lambda x \lambda s.x$ spricht in s

Peter *spricht*

Kompositionalität

- Bis jetzt wurde als Meta-Sprache Deutsch + Lambda-Notation verwendet
- Prädikatenlogik ist präziser als Deutsch und deshalb als Meta-Sprache vorzuziehen
- beachte: alle Prädikate haben (anders als in der Standard-Übersetzung) ein zusätzliches Argument für Situationen

S:$\lambda s.\textsc{speak'}(s, p)$

NP:p VP:$\lambda x \lambda s.\textsc{speak'}(s, x)$

N:p V:$\lambda x \lambda s.\textsc{speak'}(s, x)$

Peter *spricht*

Kompositionalität

- Bedeutung des Mutterknotens ergibt sich eindeutig aus Bedeutungen der Tochterknoten:
  - bei nicht-verzweigenden Knoten sind Bedeutung von Mutter- und Tochterknoten identisch
  - bei NP-VP-Struktur wird Bedeutung der VP (eine Funktion) auf Bedeutung der NP angewendet
- Annahme: diese Korrespondenz zwischen Syntax und Semantik gilt für alle Sätze des Deutschen (wobei die korrekte Syntax des Deutschen natürlich viel komplexer ist, aber das gehört nicht hierher)

Kompositionalität

- formal: für jede Syntax-Regel gibt es eine korrespondierende semantische Regel
- bis jetzt sind das:
  - $S \rightarrow NP, VP$ :: $\|S\| = \|VP\|(\|NP\|)$
  - $NP \rightarrow N$ :: $\|NP\| = \|N\|$
  - $VP \rightarrow V$ :: $\|VP\| = \|V\|$

Schönfinkelisierung

- Bedeutung transitiver Verben: **zweistellige Relation**
- z.B.: *lieben* $\rightsquigarrow \{\langle x, y\rangle | \text{LOVE'}(x, y)\}$[1]
- Darstellung als charakteristische Funktion:

$$\lambda\langle x, y\rangle \in E \times E.\text{LOVE'}(x, y)$$

- Lambda-Konversion:

$$(\lambda\langle x, y\rangle \in E \times E.\text{LOVE'}(x, y))(\langle a, h\rangle) \quad = \quad \text{LOVE'}(a, h)$$

[1] Wir ignorieren für den Moment die Situationsabhängigkeit.

Kompositionalität

Schönfinkelisierung

- Was ist Bedeutung von *liebt Hans*? Die Menge der Individuen, die Hans lieben.

$$\|\textit{liebt Hans}\| = \{x | \textsc{love'}(x, h)\} \approx \lambda x.\textsc{love'}(x, h)$$

- *liebt* kann auch als Funktion aufgefasst werden, die Bedeutung von α auf Bedeutung von *liebt* α abbildet:

$$\|\textit{liebt}\| = \lambda y \lambda x.\textsc{love'}(x, y)$$

Kompositionalität

Schönfinkelisierung

- zweistellige Relation $\{\langle x, y\rangle | \text{LOVE'}(x, y)\}$ wird also umgewandelt in zweistellige charakteristische Funktion $\lambda\langle x, y\rangle.\text{LOVE'}(x, y)$, und diese in eine einstellige Funktion, deren Wert eine einstellige charakteristische Funktion ist:

$$\lambda y \lambda x.\text{LOVE'}(x, y)$$

- generelle Technik:

$$\{\langle x, y\rangle | R(x, y)\} \rightsquigarrow \lambda\langle x, y\rangle.R(x, y) \rightsquigarrow \lambda y \lambda x.R(x, y)$$

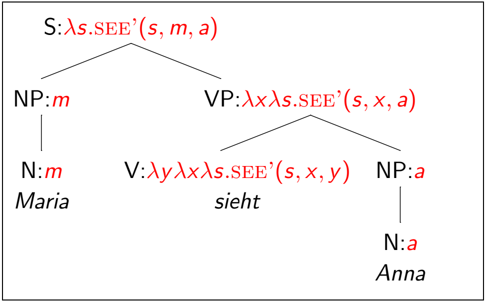
- auch auf mehrstellige Relationen anwendbar:

$$\{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle | S(x_1, \cdots, x_n)\} \rightsquigarrow \lambda x_n. \cdots .\lambda x_1.S(x_1, \cdots, x_n)$$

Beachte: Reihenfolge der Variablen im Lambda-Präfix ist Spiegelbild der Reihenfolge im Argumentraster der Relation!

Transitive Verben

- Beispiele: *lieben, kennen, sehen, helfen, ...*
- drücken **zweistellige Relationen** zwischen Individuen aus
- plus Situationsabhängigkeit: dreistellige Relation
- $\|\textit{Maria sieht Anna}\| = \lambda x.\textsc{see}'(s, m, a)$
- $\|\textit{sieht}\| = \lambda y \lambda x \lambda s.\textsc{see}'(s, x, y)$



Regeln:

- $S \rightarrow NP, VP$ ::
  $\|S\| = \|VP\|(\|NP\|)$
- $NP \rightarrow N$ ::
  $\|NP\| = \|N\|$
- $VP \rightarrow V$::
  $\|VP\| = \|V\|$
- $VP \rightarrow V, NP$ ::
  $\|VP\| = \|V\|(\|NP\|)$

Boolsche Operatoren

Die kompositionale Analyse der Boolschen Operationen kann auch in dem neuen Format ausgedrückt werden:

Negation

- Logischer Operator der Negation kann auf zweierlei Weise im Dt. ausgedrückt werden:
  - *Es ist nicht der Fall, dass Peter spricht.*
  - *Peter spricht nicht.*
- semantischer Effekt ist in beiden Fällen Komplementmengenbildung:

$$\|\textit{Peter spricht nicht}\| = \lambda s.\neg\text{SPEAK'}(s, p)$$

Negation

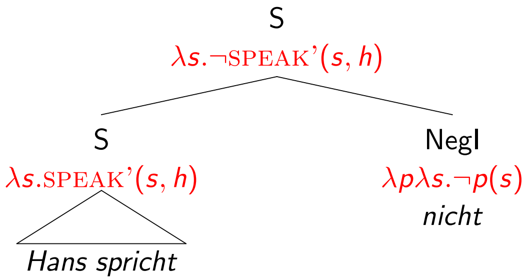
- Neue Regeln:
  - $S_1 \longrightarrow NegA, S_2 :: \|S_1\| = \|NegA\|(\|S_2\|)\|$
  - $S_1 \longrightarrow S_2, NegI :: \|S_1\| = \|NegI\|(\|S_2\|)\|$
  - $NegA \longrightarrow$ *Es ist nicht der Fall, dass* $:: \|NegA\| = \lambda p \lambda s. \neg p(s)$
  - $NegI \longrightarrow$ *nicht* $:: \|NegI\| = \lambda p \lambda s. \neg p(s)$

Negation

- S::$\lambda s.\neg\text{SPEAK'}(s, p)$
  - NegA::$\lambda p \lambda s.\neg p(s)$
    - *Es ist nicht der Fall, dass*
  - S::$\lambda s.\text{SPEAK'}(s, h)$
    - NP h
      - N h
        - *Hans*
    - VP $\lambda x \lambda s.\text{SPEAK'}(s, x)$
      - V $\lambda x \lambda s.\text{SPEAK'}(s, x)$
        - *spricht*

Boolsche Operatoren

Negation



Boolsche Operatoren

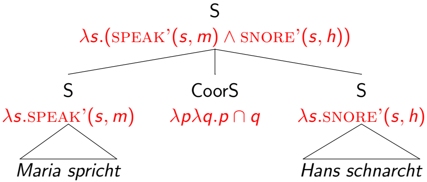
Satz-Koordination

- Regeln:
  - $S_1 \longrightarrow S_2, CoorS, S_3$ :: $\|S_1\| = \|CoorS\|(\|S_2\|)(\|S_3\|)$
  - $CoorS \longrightarrow und$ :: $\lambda p \lambda q.p \cap q$
  - $CoorS \longrightarrow oder$ :: $\lambda p \lambda q.p \cup q$
- Merke:

$$\begin{aligned} \lambda s.\phi \cap \lambda s.\psi &= \lambda s.(\phi \wedge \psi) \\ \lambda s.\phi \cup \lambda s.\psi &= \lambda s.(\phi \vee \psi) \end{aligned}$$

Boolsche Operatoren

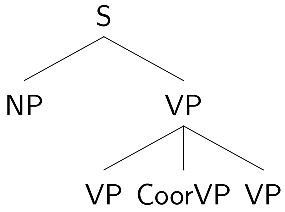
Satz-Koordination



Boolsche Operatoren

VP-Koordination

- Koordination kann auch zwei VPn verknüpfen:
    - *Peter schläft und schnarcht.*
    - *Hans läuft oder steht.*
- syntaktische Struktur:



- Semantik: analog zu Satzoperatoren
  Peter schläft und schnarcht $\Leftrightarrow$ *Peter schläft und Peter schnarcht.*

VP-Koordination

- Regeln:
  - $VP_1 \rightarrow VP_2, CoorVP, VP_3$ ::
    $\|VP_1\| = \|CoorVP\|(\|VP_2\|)(\|VP_3\|)$
  - $CoorVP \rightarrow und$ :: $\lambda P \lambda Q \lambda x \lambda s. P(x)(s) \wedge Q(x)(s)$
  - $CoorVP \rightarrow oder$ :: $\lambda P \lambda Q \lambda x \lambda s. P(x)(s) \vee Q(x)(s)$

VP-Koordination