

## Semantik und Pragmatik

22. Mai 2006

Gerhard Jäger

1/32

## Lambda-Notation

### Lambda-Notation mit Angabe des Definitionsbereichs

- Funktionen haben Definitionsbereich:

$$\{(x, x^2) | x \in \mathbb{N}\} \neq \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$$

- Notation  $\lambda x. x^2$  deshalb unvollständig
- vollständige Notation: Angabe des Definitionsbereichs im Lambda-Präfix:
  - $\lambda x \in \mathbb{N}. (x^2)$
  - $\lambda x \in \mathbb{R}. (x^2)$
- allgemeines Format:  
 $\lambda$  Variable  $\in$  Definitionsbereich. (Beschreibung des Wertes der Variable)

2/32

## Lambda-Notation

### Lambda-Notation mit Angabe des Definitionsbereichs

- Beispiel
  - $(\lambda x \in \mathbb{R}. (x^2 + 3x + 2))(-10) = 72$
  - $(\lambda x \in \mathbb{N}. (x^2 + 3x + 2))(-10)$  ist nicht definiert
- Angabe des Definitionsbereichs sowie Klammern um Beschreibung des Wertes werden häufig weggelassen, wenn dadurch keine Ambiguität auftritt

3/32

## Lambda-Notation

### Variablen-Konventionen

- Schreibweise mit explizitem Definitionsbereich ist umständlich
- Vereinfachung durch Variablen-Konventionen:
  - Jeder Variablen-Name ist per Konvention mit bestimmten Definitionsbereich assoziiert:
    - $x, y, z, \dots : E$  (Menge der Individuen)
    - $s, s', s_1, s_2, \dots : S$  (Menge der Situationen)
    - $P, Q, P', \dots : S \times E$  (Menge der Relationen zwischen Situationen und Individuen)
    - $R, S, \dots : S \times E \times E$  (Menge der Relationen zwischen Situationen und Paaren von Individuen)
    - $p, q, \dots : POW(S)$  (Menge der Mengen von Situationen)

4/32

## Lambda-Notation

### Variablen-Konventionen

- soweit nicht anders angegeben, wird implizit angenommen, dass jede Variable nur in dem Bereich Werte nehmen kann, mit dem der Variablenname assoziiert ist
- es gilt also:
  - $\lambda x. \phi$  ist eine Abkürzung für  $\lambda x \in E. \phi$
  - $\lambda s'. \phi$  ist eine Abkürzung für  $\lambda s' \in S. \phi$
  - $\lambda P. \phi$  ist eine Abkürzung für  $\lambda P \in S \times E. \phi$
  - $\lambda p. \phi$  ist eine Abkürzung für  $\lambda p \in POW(S). \phi$
- usw.

5/32

## Lambda-Notation

### Funktionen mit Funktionen als Argumente

- Argument einer Funktion kann komplex sein:
  - Argument ist eine Menge
    - $\lambda X \in POW(\mathbb{N}). (X \cap \{1, 2, 3\})$
    - $(\lambda X \in POW(\mathbb{N}). (X \cap \{1, 2, 3\}))(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2, 3\}$
    - $(\lambda X \in POW(\mathbb{N}). (X \cap \{1, 2, 3\}))(\{4, 5, 6\}) = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$
    - $(\lambda X \in POW(\mathbb{N}). (X \cap \{1, 2, 3\}))(\text{Isaak})$  ist nicht definiert
  - Argument ist selbst eine Funktion
    - $\lambda f \in N \mapsto N. (f(3))$
    - $(\lambda f \in N \mapsto N. (f(3)))(\lambda x \in N. (x^2)) = (\lambda x \in N. x^2)(3) = 3^2 = 9$

6/32

## Lambda-Notation

### Funktionen mit Funktionen als Argumente

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned}(\lambda f.(f(3) + f(4)))(\lambda x.x^2 + x + 1) &= (\lambda x.x^2 + x + 1)(3) + (\lambda x.x^2 + x + 1)(4) \\ &= 3^2 + 3 + 1 + 4^2 + 4 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda f.f(f(3) - 9))(\lambda x.x^2 + x + 1) &= (\lambda x.x^2 + x + 1)((\lambda x.x^2 + x + 1)(3) - 9) \\ &= (\lambda x.x^2 + x + 1)((3^2 + 3 + 1) - 9) \\ &= (\lambda x.x^2 + x + 1)(4) \\ &= 4^2 + 4 + 1 \\ &= 21\end{aligned}$$

7/32

## Lambda-Notation

### Funktionen mit Funktionen als Wert

Gleichermaßen können Funktionen auch Werte haben, die wieder Funktionen sind, z.B.

- $\lambda x \lambda y. x + y$ 
  - $((\lambda x(\lambda y. x + y))(2))(3) =$
  - $= (\lambda y. 2 + y)(3)$
  - $= 2 + 3 = 5$
- in der Notation haben solche funktionswertige Funktionen mehrere Lambda-Operatoren hintereinander
- es gilt die Konvention:
  - Lambda-Operatoren werden von links nach rechts geklammert
  - Argumente werden von rechts nach links geklammert
  - erstes Lambda gehört zu erstem Argument, zweites Lambda zu zweitem Argument usw.

8/32

## Lambda-Notation

### Funktionen mit Funktionen als Wert

$$(\lambda x_1. \dots \lambda x_n. \alpha)(a_1) \dots (c_n)$$

ist eine Abkürzung für

$$(((\lambda x_1. (\dots (\lambda x_n. (\alpha)(a_1)))) \dots))(c_n))$$

9/32

## Lambda-Notation

### Skopus, Variablenbindung, Variablenumbenennung

- $\lambda$ -Operator verhält sich in vielerlei Hinsicht wie ein Quantor in der Prädikatenlogik
- wie in der Prädikatenlogik ist die Wahl des Variablenamens unwesentlich:

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) &= \forall y(P(y) \rightarrow Q(y)) \\ \lambda x.x^2 + 3x + 4 &= \lambda w.w^2 + 3w + 4\end{aligned}$$

- wichtig ist nur welche Variablenvorkommen gleichnamig sind und welche ungleichnamig

10/32

## Lambda-Notation

### Skopus, Variablenbindung, Variablenumbenennung

- **Skopus** eines Lambda-Operators: Ausdruck in Klammern, der der Variable und dem Punkt folgt

$$(\lambda f. \underbrace{f(f(3) - 9)})(\lambda x. \underbrace{x^2 + x + 1})$$

- alle freien Vorkommen der Variablen, die nach dem  $\lambda$  steht, im Skopus des  $\lambda$ -Operators werden durch den Operator **gebunden**
- eine Variable, die nicht gebunden ist (weder durch ein  $\lambda$  noch durch einen Quantor), heißt **frei**
- Eine Variable im  $\lambda$ -Operator kann umbenannt werden, wenn
  - alle Variablenvorkommen, die durch den Operator gebunden werden, ebenfalls umbenannt werden
  - die Bindungsrelationen dadurch nicht zerstört werden

11/32

## Lambda-Notation

### Charakteristische Funktionen in Lambda-Notation

- Charakteristische Funktion  $\chi_M$  einer Menge  $M$ :
  - Wertebereich:  $\{0, 1\}$
  - Bildungsvorschrift:  $\chi_M(x) = 1$  gdw.  $x \in M$ , sonst 0
- Bedeutung von meta-sprachlichen Sätzen ist immer „wahr“ (bzw. 1) oder „falsch“ (bzw. 0)
- deshalb kann charakteristische Funktion als  $\lambda$ -Term ausgedrückt werden:

$$\lambda x. x \in M$$

- Beispiel:
  - angenommen,  $M = \{x \mid x \text{ ist ein Mensch}\}$
  - dann:  $\chi_M = \lambda x. x \text{ ist ein Mensch}$

**Mengen können generell als Lambda-Terme dargestellt werden.**

12/32



## Kompositionalität

### Schönfinkalisierung

- Bedeutung transitiver Verben: **zweistellige Relation**
- z.B.:  $lieben \sim \{(x, y) | LOVE'(x, y)\}^1$
- Darstellung als charakteristische Funktion:

$$\lambda(x, y) \in E \times E.LOVE'(x, y)$$

- Lambda-Konversion:

$$(\lambda(x, y) \in E \times E.LOVE'(x, y))(a, h) = LOVE'(a, h)$$

<sup>1</sup>Wir ignorieren für den Moment die Situationsabhängigkeit.

19/32

## Kompositionalität

### Schönfinkalisierung

- Was ist Bedeutung von *liebt Hans*? Die Menge der Individuen, die Hans lieben.

$$\|liebt Hans\| = \{x | LOVE'(x, h)\} \approx \lambda x.LOVE'(x, h)$$

- *liebt* kann auch als Funktion aufgefasst werden, die Bedeutung von  $\alpha$  auf Bedeutung von *liebt*  $\alpha$  abbildet:

$$\|liebt\| = \lambda y \lambda x.LOVE'(x, y)$$

20/32

## Kompositionalität

### Schönfinkalisierung

- zweistellige Relation  $\{(x, y) | LOVE'(x, y)\}$  wird also umgewandelt in zweistellige charakteristische Funktion  $\lambda(x, y).LOVE'(x, y)$ , und diese in eine einstellige Funktion, deren Wert eine einstellige charakteristische Funktion ist:

$$\lambda y \lambda x.LOVE'(x, y)$$

- generelle Technik:

$$\{(x, y) | R(x, y)\} \sim \lambda(x, y).R(x, y) \sim \lambda y \lambda x.R(x, y)$$

- auch auf mehrstellige Relationen anwendbar:

$$\{(x_1, \dots, x_n) | S(x_1, \dots, x_n)\} \sim \lambda x_n. \dots \lambda x_1.S(x_1, \dots, x_n)$$

Beachte: Reihenfolge der Variablen im Lambda-Präfix ist Spiegelbild der Reihenfolge im Argumentraster der Relation!

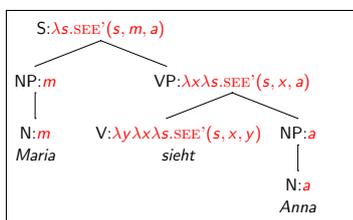
21/32

## Transitive Verben

- Beispiele: *lieben, kennen, sehen, helfen, ...*
- drücken **zweistellige Relationen** zwischen Individuen aus
- plus Situationsabhängigkeit: dreistellige Relation
- $\|Maria\ sieht\ Anna\| = \lambda x.SEE'(s, m, a)$
- $\|sieht\| = \lambda y \lambda x \lambda s.SEE'(s, x, y)$

22/32

## Transitive Verben



### Regeln:

- $S \rightarrow NP, VP :: \|S\| = \|VP\|(\|NP\|)$
- $NP \rightarrow N :: \|NP\| = \|N\|$
- $VP \rightarrow V :: \|VP\| = \|V\|$
- $VP \rightarrow V, NP :: \|VP\| = \|V\|(\|NP\|)$

23/32

## Boolsche Operatoren

Die kompositionale Analyse der Booleschen Operationen kann auch in dem neuen Format ausgedrückt werden:

### Negation

- Logischer Operator der Negation kann auf zweierlei Weise im Dt. ausgedrückt werden:
  - *Es ist nicht der Fall, dass Peter spricht.*
  - *Peter spricht nicht.*
- semantischer Effekt ist in beiden Fällen Komplementmengenbildung:

$$\|Peter\ spricht\ nicht\| = \lambda s.\neg SPEAK'(s, p)$$

24/32

## Boolsche Operatoren

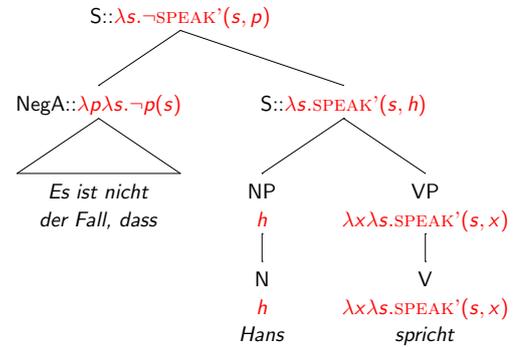
### Negation

- Neue Regeln:
  - $S_1 \rightarrow \text{NegA}, S_2 :: \|S_1\| = \|\text{NegA}\|(\|S_2\|)$
  - $S_1 \rightarrow S_2, \text{NegI} :: \|S_1\| = \|\text{NegI}\|(\|S_2\|)$
  - $\text{NegA} \rightarrow \text{Es ist nicht der Fall, dass} :: \|\text{NegA}\| = \lambda p \lambda s. \neg p(s)$
  - $\text{NegI} \rightarrow \text{nicht} :: \|\text{NegI}\| = \lambda p \lambda s. \neg p(s)$

25/32

## Boolsche Operatoren

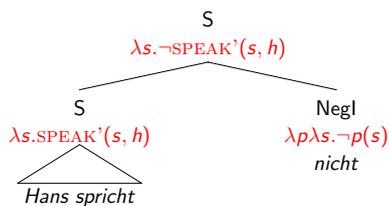
### Negation



26/32

## Boolsche Operatoren

### Negation



27/32

## Boolsche Operatoren

### Satz-Koordination

- Regeln:
  - $S_1 \rightarrow S_2, \text{CoorS}, S_3 :: \|S_1\| = \|\text{CoorS}\|(\|S_2\|)(\|S_3\|)$
  - $\text{CoorS} \rightarrow \text{und} :: \lambda p \lambda q. p \cap q$
  - $\text{CoorS} \rightarrow \text{oder} :: \lambda p \lambda q. p \cup q$

- Merke:

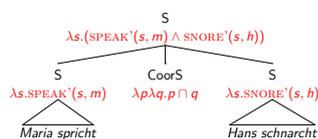
$$\lambda s. \phi \cap \lambda s. \psi = \lambda s. (\phi \wedge \psi)$$

$$\lambda s. \phi \cup \lambda s. \psi = \lambda s. (\phi \vee \psi)$$

28/32

## Boolsche Operatoren

### Satz-Koordination

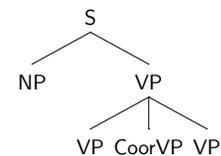


29/32

## Boolsche Operatoren

### VP-Koordination

- Koordination kann auch zwei VPn verknüpfen:
  - Peter schläft und schnarcht.
  - Hans läuft oder steht.
- syntaktische Struktur:



- Semantik: analog zu Satzoperatoren
- $\text{Peter schläft und schnarcht} \Leftrightarrow \text{Peter schläft und Peter schnarcht.}$

30/32

## Boolsche Operatoren

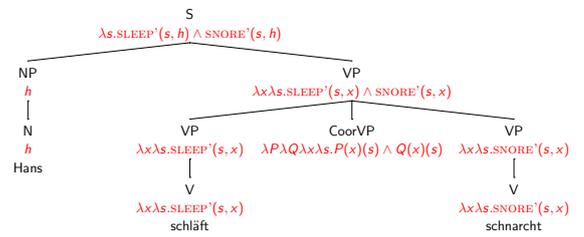
### VP-Koordination

- Regeln:
  - $VP_1 \rightarrow VP_2, \text{CoorVP}, VP_3 ::$   
 $\|VP_1\| = \|CoorVP\|(\|VP_2\|)(\|VP_3\|)$
  - $CoorVP \rightarrow \text{und} :: \lambda P \lambda Q \lambda x \lambda s. P(x)(s) \wedge Q(x)(s)$
  - $CoorVP \rightarrow \text{oder} :: \lambda P \lambda Q \lambda x \lambda s. P(x)(s) \vee Q(x)(s)$

31/32

## Boolsche Operatoren

### VP-Koordination



32/32