Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 4, 7. Mai 2008

Gerhard Jäger

Folgerungen und Wahrheitsbäume

- Folgerungen (mit endlicher Prämissenmenge; das wird in Zukunft stillschweigend vorausgesetzt) können per Deduktionstheorem immer in Tautologien umgewandelt werden
- Folgerungen können aber auch direkt mit Wahrheitsbäumen bewiesen werden:
  - Prämissen werden als wahr angenommen
  - Konklusion wird als falsch angenommen

Folgerungen und Wahrheitsbäume

- um Folgerung

  $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$$

  zu beweisen, beginne Wahrheitsbaum mit

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \neg\psi \end{array}$$

Folgerungen und Wahrheitsbäume

Theorem 6 *Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ aussagenlogische Formeln, so folgt die Formel ψ logisch aus den Prämissen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, wenn jeder Ast eines Wahrheitsbaums, dessen Stamm aus den Sätzen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $\neg\psi$ gebildet wird und der nur mit Hilfe der oben angegebenen Regeln entwickelt wurde, mit einem „x“ geschlossen werden kann, da in ihm eine Formel sowohl in negierter wie in nicht negierter Form vorkommt.*

Beispiel

$$p \longrightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p$$

$$\begin{array}{lcc}
1. & p \longrightarrow q & (A) \\
2. & \neg q & (A) \\
3. & \neg\neg p & (A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
4. & \neg p & (1) & 5. & q & (1) \\
 & \times & (3,4) & & \times & (2,5)
\end{array}$$

Beispiel

- Folgerung:

$$p \rightarrow q, p \vee r, \neg r \Rightarrow p \wedge q$$

- es gibt mehrere Beweiswege

Beispiel

1.	$p \rightarrow q$	(A)
2.	$p \vee r$	(A)
3.	$\neg r$	(A)
4.	$\neg(p \wedge q)$	(A)

- 5. p (2)
  - 7. $\neg p$ (1)
    - x $(5, 7)$
  - 8. q (1)
    - 9. $\neg p$ (4)
      - x $(5, 9)$
    - 10. $\neg q$ (4)
      - x $(8, 10)$
- 6. r (2)
  - x $(2, 6)$

Beispiel

1.	$p \rightarrow q$	(A)
2.	$p \vee r$	(A)
3.	$\neg r$	(A)
4.	$\neg(p \wedge q)$	(A)

- 5. $\neg p$ (1)
  - 7. p (2)
    $\times$ $(5, 7)$
  - 8. r (2)
    $\times$ $(3, 8)$
- 6. q (1)
  - 9. p (2)
    - 11. $\neg p$ (4)
      $\times$ $(9, 11)$
    - 12. $\neg q$ (4)
      $\times$ $(6, 12)$
  - 10. r (2)
    $\times$ $(3, 10)$

Natürliches Schließen: Motivation

- Wahrheitsbaum-Methode ist manchmal relativ umständlich
- intuitiver Gehalt der aussagenlogischen Operatoren wird nicht direkt widergespiegelt
- z.B. ergeben sich manche Folgerungen „direkt“ aus diesem intuitiven Gehalt:

$$
\begin{aligned}
\varphi, \psi &\quad\Rightarrow\quad \varphi \wedge \psi \\
\varphi \wedge \psi &\quad\Rightarrow\quad \varphi \\
\varphi, \varphi \rightarrow \psi &\quad\Rightarrow\quad \psi \\
\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi &\quad\Rightarrow\quad \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Natürliches Schließen: Motivation

- meta-logische Eigenschaften der Folgerungsrelation sind nicht nutzbar
  - Identität:

$$\varphi \Rightarrow \varphi$$

  - Schnitt:

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \qquad N, \varphi \Rightarrow \xi}{M, N \Rightarrow \xi}$$

  - Monotonie

$$\frac{M \Rightarrow \varphi}{M, \psi \Rightarrow \varphi}$$

Natürliches Schließen: Motivation

- **Kalkül des natürlichen Schließens:**
  - *syntaktischer* Kalkül: nur die Form der Formeln ist entscheidend (so gesehen ist auch der Wahrheitsbaum-Kalkül syntaktisch)
  - zwei zentrale Fragen für jeden Operator O:
    - Wann darf ich O in der Konklusion einer Folgerung verwenden? (Einführungsregeln)
    - Was kann ich mit einer Prämisse machen, die O als Hauptfunktor enthält? (Beseitigungsregel)

Natürliches Schließen: Motivation

- Beispiele für Einführungsregeln:

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \qquad M \Rightarrow \psi}{M \Rightarrow \varphi \wedge \psi}$$

$$\frac{M, \varphi \Rightarrow \psi}{M \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}$$

- Beispiele für Beseitigungsregeln

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{M \Rightarrow \varphi}$$

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \qquad M \Rightarrow \varphi}{M \Rightarrow \psi}$$

Kalkül des Natürlichen Schließens

- Notation: für syntaktisch abgeleitete Folgerungen benutzt man „$\vdash$“ *statt „$\Rightarrow$“*
- Terminologie:
  - syntaktisch bewiesene Formeln heißen **Theoreme** *(Gegenstück zu den semantischen **Tautologien**)*
  - wenn aus Prämissen M die Konklusion φ gewonnen werden kann, dann ist φ aus M **ableitbar** *(Gegenstück zum semantischen Begriff „**folgt logisch**“)*

Natürliches Schließen

- Grundstruktur eines Beweises (im Kalkül des Natürlichen Schließens):

Prämissen
Zwischenschritte
⋮
Zwischenschritte
Konklusion

Natürliches Schließen

- **Zwischenschritte** sind
  - Formeln, die aus vorangehenden Zeilen (aus derselben Box oder aus äußeren Boxen) durch Regelanwendung gewonnen werden, oder
  - selbst Beweise (also Boxen)
  - Wiederholung von vorangehenden Zeilen

Zugänglichkeit

- Jede Zeile in einem Beweis wird von einer Menge von Boxen eingeschlossen
- Von einer bestimmten Zeile n aus ist eine andere Zeile m **zugänglich**, wenn
  - m weiter oben steht als n, und
  - alle Boxen, die m einschließen, auch n einschließen, n also nicht weiter außen steht als m

Natürliches Schließen

- Regeln: für jeden aussagenlogischen Operator gibt es ein oder zwei **Einführungs-** und ein oder zwei **Beseitigungs-**Regeln
- Schreibweise:
  - mindestens eine Zeile oder Box über dem waagerechten Strich
  - eine Zeile unter dem Strich
  - Name der Regel steht neben dem Strich

Natürliches Schließen

- Anwendung: wenn in einem Beweis alle Zeilen/Boxen über dem Strich vorkommen **und zugänglich sind**, darf die Formel unter dem Strich dem Beweis hinzugefügt werden.
- sinnvollerweise nummeriert man die Zeilen durch und notiert am Ende der Zeile den Namen der angewendeten Regel und die verwendeten Prämissen

Natürliches Schließen: Regeln

Negation

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \\ \neg\psi \end{array}}}{\neg\varphi}\ \neg E$$

$$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \neg B$$

Natürliches Schließen: Regeln

Konjunktion

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge B1 \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge B2$$

Natürliches Schließen: Regeln

Disjunktion

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee E1 \qquad\qquad \frac{\varphi}{\psi \vee \varphi}\ \vee E2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \vee \psi \\[1em] \boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \hline \vdots \\ \xi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \hline \vdots \\ \xi\end{array}}\end{array}}{\xi}\ \vee B$$

Natürliches Schließen: Regeln

Implikation

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \hline \vdots \\ \psi\end{array}}}{\varphi \longrightarrow \psi} \longrightarrow E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \longrightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi} \longrightarrow B$$

Natürliches Schließen: Regeln

Äquivalenz

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \hline \vdots\\ \psi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \hline \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \leftrightarrow \psi\\ \varphi\end{array}}{\psi} \leftrightarrow B,1 \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\varphi \leftrightarrow \psi\\ \psi\end{array}}{\varphi} \leftrightarrow B,2$$

Natürliches Schließen

Definition 7 *Wenn nach den Regeln des Natürlichen Schließens ein Beweis der Form*

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}$$

geführt werden kann, dann ist ψ *aus* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ***ableitbar**, d.h.*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Natürliches Schließen

Theorem 8 (Korrektheit und Vollständigkeit)

$$M \vdash \varphi$$

genau dann wenn

$$M \Rightarrow \varphi$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (1)

$1. \neg(p \wedge q) \qquad (A)$

$2. \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad (A)$

$3. \neg p \qquad (A)$

$4. \neg p \vee \neg q \qquad \vee E1; 3$

$5. \neg\neg p \qquad \neg E; 3, 4, 2$

$6. \neg q \qquad (A)$

$7. \neg p \vee \neg q \qquad \vee E2; 6$

$8. \neg\neg q \qquad \neg E; 6, 7, 2$

$9. p \qquad \neg B; 5$

$10. q \qquad \neg B; 8$

$11. p \wedge q \qquad \wedge E; 9, 10$

$12. \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \qquad \neg E; 2, 11, 1$

$13. \neg p \vee \neg q \qquad \neg B; 12$

$$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (2)

$1. \neg p \vee \neg q$	(A)
$\quad 2. p \wedge q$	(A)
$\quad 3. p$	$\wedge E1; 2$
$\quad 4. q$	$\wedge E2; 2$
$\quad\quad 5. \neg p$	(A)
$\quad\quad 6. \neg p$	(6)
$\quad\quad 7. \neg q$	(A)
$\quad\quad\quad 8. p$	(A)
$\quad\quad\quad 9. p$	8
$\quad\quad 10. \neg p$	$\neg E; 8, 4, 7$
$\quad 11. \neg p$	$\vee B; 1, 5, 6, 7, 9$
$12. \neg(p \wedge q)$	$\neg E; 2, 3, 11$

$$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (3)

$1. \neg(p \vee q)$	(A)
$2. p$	(A)
$3. p \vee q$	$\vee E1; 2$
$4. \neg p$	$\neg E; 2, 1, 3$
$5. q$	(A)
$6. p \vee q$	$\vee E2; 5$
$7. \neg q$	$\neg E; 5, 1, 6$
$8. \neg p \wedge \neg q$	$\wedge E; 4, 7$

$$\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (4)

$1. \neg p \wedge \neg q \qquad (A)$

$2. \neg p \qquad \wedge E1; 1$

$3. \neg q \qquad \wedge E2; 1$

$4. p \vee q \qquad (A)$

$5. p \qquad (A)$

$6. p \qquad 5$

$7. q \qquad (A)$

$8. \neg p \qquad (A)$

$9. \neg p \qquad 8$

$10. \neg\neg p \qquad \neg E; 8, 3, 7$

$11. p \qquad \neg B; 10$

$12. p \qquad \vee B; 4, 5, 6, 7, 11$

$13. \neg(p \vee q) \qquad \neg E; 4, 2, 12$

$$\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$$

Lemmata

- Schnittregel:

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \qquad N, \varphi \Rightarrow \xi}{M, N \Rightarrow \xi}$$

- einmal bewiesene Ableitungen können wiederverwendet werden
- vereinfacht praktische Arbeit massiv

Ex falsum quod libet

$1. \varphi$	(A)
$2. \neg\varphi$	(A)
$\boxed{3. \neg\psi \quad (A)}$	
$4. \neg\neg\psi$	$\neg E; 3, 1, 2$
$5. \psi$	$\neg B; 4$

$$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$$

- diese Folgerung kann, einmal bewiesen, als neue Regel verwendet werden
- wenn an einer Stelle in einem Beweis sowohl φ als auch $\neg\varphi$ zugänglich sind, darf eine beliebige Formel hinzugefügt werden