Formale Methoden II

SS 2005

Universität Bielefeld

Teil 5, 14. Mai 2008

Gerhard Jäger

Natürliches Schließen

Allgemeine Bemerkungen

- es gibt keinen einfachen Algorithmus zum Beweis einer gegebenen Ableitung
- an jeder Stelle in einem Beweis darf ein Unterbeweis mit beliebiger Annahme begonnen werden
- es gibt für jede gültige Ableitung unendlich viele Beweise
- **aber:** man kann mit natürlichem Schließen nicht beweisen, dass eine Formel nicht aus gegebenen Prämissen ableitbar ist
- bei Verdacht auf Nicht-Ableitbarkeit daher eher mit Wahrheitsbäumen arbeiten

Natürliches Schließen

Faustregeln

- immer „Buch führen“, welches Zwischenergebnis gerade bewiesen werden soll
- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \wedge \psi$ ist:
  - beweise zunächst φ
  - beweise dann ψ
  - führe $E\wedge$ durch
- wenn aktuelles Beweisziel $\neg\varphi$ ist:
  - beginne Unterbeweis mit φ als Annahme
  - für irgendeine Formel ψ: beweise sowohl ψ als auch $\neg\psi$
  - beende den Unterbeweis mit $\neg E$

Natürliches Schließen

- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \to \psi$ ist:
  - beginne neuen Unterbeweis mit φ als Annahme
  - versuche ψ zu beweisen
  - im Erfolgsfall: beende den Unterbeweis mit $E \to$

Natürliches Schließen

- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \vee \psi$ ist:
  - beweise φ **oder**
  - beweise ψ
  - im Erfolgsfall, führe $\varphi \vee \psi$ per $E\vee, 1(2)$ ein

Natürliches Schließen

- andernfalls: falls eine zugängliche Formel die Form $\xi \vee \zeta$ hat
  - kombiniere $\vee B$ und $\vee E$:
  - beginne Unterbeweis mit Annahme ξ und beweise φ (oder ψ)
  - leite daraus mit Hilfe von $\vee E$ $\varphi \vee \psi$ ab und beende Unterbeweis
  - beginne zweiten Unterbeweis und beweise ψ (φ)
  - leite daraus mit Hilfe von $\vee E$ $\varphi \vee \psi$ ab und beende Unterbeweis
  - leite mit Hilfe von $\vee B$ $\varphi \vee \psi$ ab

Natürliches Schließen

- wenn aktuelles Beweisziel $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist:
  - beginne Unterbeweis mit Annahme φ
  - beweise ψ
  - beende diesen Unterbeweis und beginne neuen Unterbeweis mit Annahme ψ
  - beweise φ
  - beende den zweiten Unterbeweis und führe $\leftrightarrow E$ durch

Natürliches Schließen

- weiter Faustregeln:
  - führe $\wedge B$, $\rightarrow B$ und $\leftrightarrow B$ immer so früh wie möglich durch
  - führe auch $\neg E$ immer so früh wie möglich durch; wenn eine Beweiszeile die Negation einer früheren zugänglichen (!) Beweiszeile ist, beende sofort den aktuellen Unterbeweis mit $\neg E$

Natürliches Schließen

- wenn keine dieser Faustregeln weiterhilft: **indirekter Beweis**:
- angenommen, φ soll bewiesen werden
  - beginne Unterbeweis mit Annahme $\neg\varphi$
  - versuche, Widerspruch abzuleiten
  - d.h., versuche für irgendeine Formel ψ sowohl ψ als auch $\neg\psi$ zu beweisen
  - im Erfolgsfall: beende aktuellen Unterbeweis mit $\neg E$
  - Ergebnis is $\neg\neg\varphi$
  - Anwendung von $\neg B$ führt zu φ, wie gewünscht

Beispiele: De Morgans Gesetze (1)

1. $\neg(p \wedge q)$ $\quad (A)$
2. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ $\quad (A)$
3. $\neg p$ $\quad (A)$
4. $\neg p \vee \neg q$ $\quad \vee E1; 3$
5. $\neg\neg p$ $\quad \neg E; 3, 4, 2$
6. $\neg q$ $\quad (A)$
7. $\neg p \vee \neg q$ $\quad \vee E2; 6$
8. $\neg\neg q$ $\quad \neg E; 6, 7, 2$
9. p $\quad \neg B; 5$
10. q $\quad \neg B; 8$
11. $p \wedge q$ $\quad \wedge E; 9, 10$
12. $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ $\quad \neg E; 2, 11, 1$
13. $\neg p \vee \neg q$ $\quad \neg B; 12$

$$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (2)

$1. \neg p \vee \neg q$	(A)
$2. p \wedge q$	(A)
$3. p$	$\wedge E1; 2$
$4. q$	$\wedge E2; 2$
$5. \neg p$	(A)
$6. \neg p$	(6)
$7. \neg q$	(A)
$8. p$	(A)
$9. p$	8
$10. \neg p$	$\neg E; 8, 4, 7$
$11. \neg p$	$\vee B; 1, 5, 6, 7, 9$
$12. \neg(p \wedge q)$	$\neg E; 2, 3, 11$

$$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (3)

$1. \neg(p \vee q)$	(A)
$\quad 2. p$	(A)
$\quad 3. p \vee q$	$\vee E1; 2$
$4. \neg p$	$\neg E; 2, 1, 3$
$\quad 5. q$	(A)
$\quad 6. p \vee q$	$\vee E2; 5$
$7. \neg q$	$\neg E; 5, 1, 6$
$8. \neg p \wedge \neg q$	$\wedge E; 4, 7$

$$\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$$

Beispiele: De Morgans Gesetze (4)

$1. \neg p \wedge \neg q \qquad (A)$

$2. \neg p \qquad \wedge E1; 1$

$3. \neg q \qquad \wedge E2; 1$

> $4. p \vee q \qquad (A)$
>
> > $5. p \qquad (A)$
> >
> > $6. p \qquad 5$
>
> > $7. q \qquad (A)$
> >
> > > $8. \neg p \qquad (A)$
> > >
> > > $9. \neg p \qquad 8$
> >
> > $10. \neg\neg p \qquad \neg E; 8, 3, 7$
> >
> > $11. p \qquad \neg B; 10$
>
> $12. p \qquad \vee B; 4, 5, 6, 7, 11$

$13. \neg(p \vee q) \qquad \neg E; 4, 2, 12$

$$\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$$

Lemmata

- Schnittregel:

$$\frac{M \Rightarrow \varphi \qquad N, \varphi \Rightarrow \xi}{M, N \Rightarrow \xi}$$

- einmal bewiesene Ableitungen können wiederverwendet werden
- vereinfacht praktische Arbeit massiv

Ex falsum quod libet

$1. \varphi$	(A)
$2. \neg\varphi$	(A)
$\boxed{3. \neg\psi \quad (A)}$	
$4. \neg\neg\psi$	$\neg E; 3, 1, 2$
$5. \psi$	$\neg B; 4$

$$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$$

- diese Folgerung kann, einmal bewiesen, als neue Regel verwendet werden
- wenn an einer Stelle in einem Beweis sowohl φ als auch $\neg\varphi$ zugänglich sind, darf eine beliebige Formel hinzugefügt werden

Zusammenfassung: Aussagenlogik

- hier behandelt: **klassische Aussagenlogik**
- daneben existiert eine Vielzahl nicht-klassischer Aussagenlogiken (Intuitionistische Logik, Relevanzlogik, Modallogiken, Lineare Logik, ...)

Zusammenfassung: Aussagenlogik

- meta-logische Eigenschaften der klassischen Aussagenlogik:
  - zweiwertige Semantik (jede Aussage ist entweder wahr oder falsch)
  - logische Folgerung ist korrekt und vollständig syntaktisch beschreibbar: es existieren mehrere Systeme syntaktischer Regeln (Wahrheitsbäume, natürliches Schließen), die Menge der Tautologien eindeutig beschreibt
  - logische Folgerung ist **entscheidbar**: es existiert mechanisches Entscheidungsverfahren (Wahrheitstafeln), dass es erlaubt, Tautologien von Nicht-Tautologien zu unterscheiden

Zusammenfassung: Aussagenlogik

- Ausblick:
  - (klassische) Prädikatenlogik erster Stufe (Rest des Kurses) ist korrekt und vollständig beschreibbar, aber nicht entscheidbar
  - Prädikatenlogik zweiter Stufe (und höherer Stufe), Typentheorie sind weder entscheidbar noch vollständig beschreibbar