Formale Methoden II

SS 2008

Universität Bielefeld

Teil 7, 4. Juni 2008

Gerhard Jäger

Quantoren

- bisher keine wesentliche Erweiterung der Aussagenlogik
- insbesondere ist die Theorie der **logischen Folgerung** identisch mit der für die Aussagenlogik
- der eigentliche Quantensprung von Aussagen- zur Prädikatenlogik ist die Einführung von **Quantoren**

Quantoren

- PL (Prädikatenlogik) umfasst auch klassische Syllogistik

(1)
a. Alle Menschen sind sterblich.
b. Kein Grieche ist ein Philosoph.
c. Einige Philosophen sind Musiker.
d. Nicht alle Griechen sind Musiker.

Ausdrücke wie *alle*, *kein*, *einige*, *jeder*, ... heißen **Quantoren**.

Quantoren

- PL erweitert Syllogistik auf zweierlei Weise:
  - mehrere Quantoren innerhalb eines einfachen Satzes (bzw. einer atomaren Formel)

(2) Jeder Grieche kennt einen Musiker.

  - gebundene Pronomen/Variablen:

(4) Für *jeden Griechen* gilt: wenn *er* einen Musiker kennt, dann kennt *er* auch ein Instrument.

Der Allquantor

- neues Symbol: $\forall$
- ausgesprochen: „für alle“ oder „für jedes“
- quasi wörtliche Übersetzung für das Deutsche *für jedes Ding gilt:*
- im Dt.: *jedes Ding* wird aufgegriffen von Pronomen *es*
- in PL:
  - Pronomen wird als Variable übersetzt
  - zur Eindeutigkeit wird am Allquantor angegeben, welche Variable er bindet

Der Allquantor

Für jedes Ding gilt: wenn es ein Dreieck ist, ist es ein Vieleck.

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall x(\textit{Dreieck}(x) \rightarrow \textit{Vieleck}(x))$$

Für jedes Ding gilt: es ist ein Grieche, oder es ist kein Grieche.

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall y(\textit{Grieche}(y) \vee \neg\textit{Grieche}(y))$$

Der Allquantor

Mit Hilfe geeigneter Paraphrasen können Ausdrücke wie *alle* und *jeder* durch den Allquantor übersetzt werden. Z.B.:

- Originalsatz:

  Alle Menschen sind sterblich.

- Paraphrase:

  Für jedes Ding gilt: wenn es ein Mensch ist, dann ist es sterblich.

- Übersetzung:

  $$\forall x(\textit{Mensch}(x) \rightarrow \textit{Sterblich}(x))$$

Der Existenzquantor

- neues Symbol: $\exists$
- ausgesprochen: „es gibt ein“ oder „es existiert ein“
- PL-Gegenstück zum Deutschen *Es gibt ein Ding, so dass*
- wie beim Allquantor wird explizit angegeben, welche Variable gebunden wird

Der Existenzquantor

Es gibt ein Ding, so dass es ein Rechteck ist und ein Rhombus. $\rightsquigarrow$
$\exists x(\textit{Rechteck}(x) \wedge \textit{Rhombux}(x))$

Es gibt ein Ding, so dass es ein Grieche ist, aber kein Philosoph. $\rightsquigarrow$
$\exists z(\textit{Grieche}(z) \wedge \neg \textit{Philosoph}(z))$

Der Existenzquantor

Mit Hilfe geeigneter Paraphrasen können Ausdrücke wie *ein, einige* und *manche* durch den Existenzquantor übersetzt werden. Z.B.:

- Originalsatz:

  Einige Griechen sind Philosophen.

- Paraphrase:

  Es gibt ein Ding, so dass es ein Grieche ist und ein Philosoph.

- Übersetzung:

  $$\exists y(\mathit{Grieche}(y) \wedge \mathit{Philosoph}(y))$$

Beschränkte Quantifikation

- Quantifikation in natürlicher Sprache ist normalerweise **beschränkt**

  *Alle **Menschen** sind sterblich.*
  *Einige **Griechen** sind Philosophen.*

- logische Quantoren sind im Prinzip **unbeschränkt**

  *für jedes **Ding**, es gibt ein **Ding***

- Beschränkung des Allquantors wird durch **Implikation** übersetzt

$$\forall x(\mathit{Mensch}(x) \rightarrow \mathit{Sterblich}(x))$$

- Beschränkung des Existenzquantors wird durch **Konjunktion** übersetzt

$$\exists x(\mathit{Grieche}(x) \wedge \mathit{Philosoph}(x))$$

Mehrfach-Quantifikation

- Ein Satz kann mehrere quantifizierende Ausdrücke enthalten

(5) a. Jeder Mann liebt jedes Gericht.
b. Alle Kinder lesen alle Bücher.
c. Einige Kinder gaben einem Gast einen Bonbon.

- entsprechend enthält die Übersetzung mehrere Quantoren

(6) a. $\forall x(\textit{Mann}(x) \rightarrow \forall y(\textit{Gericht}(y) \rightarrow \textit{Liebt}(x, y)))$
b. $\forall x(\textit{Kind}(x) \rightarrow \forall y(\textit{Buch}(y) \rightarrow \textit{Liest}(x, y)))$
c. $\exists x(\textit{Kind}(x) \wedge \exists y(\textit{Gast}(y) \wedge \exists z(\textit{Bonbon}(z) \wedge \textit{Gab}(x, y, z))))$

Faustregeln für die Übersetzung

- gegeben: deutscher Satz S, dessen Übersetzung Quantoren benötigt
- paraphrasiere S so, dass er mit *für alle P gilt, dass* oder *es gibt ein P dass ...* beginnt („P“ steht für ein Substantiv)
- übersetze als

  $$\forall x(P(x) \rightarrow ...)$$

  bzw.

  $$\exists x(P(x) \wedge ...)$$

  („P“ ist die Übersetzung des fraglichen Substantives)
- übersetze den Rest des Satzes

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.

(3) a. Löwen haben eine Mähne.

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.
b. Für jeden Sanftmütigen gilt: er ist selig.

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.
b. Für jeden Menschen gilt: er betrügt sich selbst.

(3) a. Löwen haben eine Mähne.
b. Für jeden Löwen gilt: es gibt eine Mähne, so dass er sie hat.

Beispiele

(1) a. Selig sind die Sanftmütigen.

b. Für jeden Sanftmütigen gilt: er ist selig.

c. $\forall x(\textit{Sanftmuetig}(x) \rightarrow \textit{Selig}(x))$

(2) a. Jeder Mensch betrügt sich selbst.

b. Für jeden Menschen gilt: er betrügt sich selbst.

c. $\forall x(\textit{Mensch}(x) \rightarrow \textit{Betruegt}(x, x))$

(3) a. Löwen haben eine Mähne.

b. Für jeden Löwen gilt: es gibt eine Mähne, so dass er sie hat.

c. $\forall y(\textit{Loewe}(y) \rightarrow \exists w(\textit{Maehne}(w) \wedge \textit{Hat}(y, w)))$

Skopusambiguität

- Sätze mit mehreren Quantoren können **mehrdeutig** (Fachausdruck: **ambig**) sein
- Ausdrücke der Prädikatenlogik sind nie mehrdeutig
- Ambige Sätze haben deshalb mehrere Übersetzungen

Jeder Mann liebt eine Frau.

$\forall x(\textit{Mann}(x) \rightarrow \exists y(\textit{Frau}(y) \wedge \textit{Liebt}(x,y)))$ $\quad$ $\exists y(\textit{Frau}(y) \wedge \forall x(\textit{Mann}(y) \rightarrow \textit{Liebt}(x,y)))$

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 1 (Syntax der Prädikatenlogik, endgültige Version)

1. *Es gibt unendlich viele Individuenkonstanten.*
2. *Es gibt unendlich viele Individuenvariablen.*
3. *Jede Individuenkonstante und jede Individuenvariable ist ein Term*
4. *Für jede natürliche Zahl n gibt es unendlich viele n-stellige Prädikate*
5. *Wenn P ein n-stelliges Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.*
6. *Jede atomare Formel ist eine Formel.*
7. *Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$ Formeln.*
8. *Wenn v eine Variable ist und φ eine Formel, dann sind $\forall v(\varphi)$ und $\exists v(\varphi)$ auch Formeln*

Syntax von PL: Konventionen

- Es gelten die selben Klammerkonventionen wie in der Aussagenlogik
- Außerdem gilt, dass $\forall v$ und $\exists v$ stärker binden als alle anderen Operatoren

$$\forall x Px \wedge Qx$$

steht also für

$$\forall x (P(x)) \wedge Q(x)$$

nicht für

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Freie und gebundene Variablen

- man unterscheidet **freie** und gebundene Vorkommen von Variablen in eine Formel
- gebundene Vorkommen von einer Variablen in einer Formel sind immer **von einem bestimmten Quantor** gebunden

Freie und gebundene Variablen

Definition 2 (Freie und gebundene Variablen-Vorkommen)

- *Alle Variablen-Vorkommen in einer atomaren Formel φ sind frei in φ.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist auch frei in $\neg\varphi$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ und ψ ist auch frei in $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist auch frei in $\forall w(\varphi)$ und $\exists w(\varphi)$, wenn $v \neq w$.*
- *Jedes freie Vorkommen von einer Variablen v in φ ist*
  - *in $\forall v(\varphi)$ durch $\forall v$ gebunden, und*
  - *in $\exists v(\varphi)$ durch $\exists v$ gebunden.*

Gebundene Variablen und Skopus

- die Formel innerhalb des Klammerpaares nach einem Quantor heißt der **Skopus des Quantors**
- Beispiele (Quantor in grün, Skopus des Quantors in rot)

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge Q(x)$$
$$\exists x(R(x)) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\exists x(R(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$$

- Ein Quantor Q bindet ein Variablenvorkommen v gdw.
  - v im Skopus von Q steht, und
  - zwischen Q und v kein weiterer **gleichnamiger** Quantor steht, in dessem Skopus v steht (und der v deshalb binden könnte)

Prädikatenlogik: noch ein Beispiel

$$\begin{aligned}
M &= \langle E, F \rangle \\
E &= \{\textbf{DOG, CAT, MAN}_1\textbf{, MAN}_2\textbf{, WOMAN}_1\textbf{,} \\
&\quad \textbf{WOMAN}_2\textbf{, CAKE, MOUSE}\} \\
F(\textit{jo}) &= \textbf{MAN}_1 \\
F(\textit{bertie}) &= \textbf{MAN}_2 \\
F(\textit{ethel}) &= \textbf{WOMAN}_1 \\
F(\textit{fiona}) &= \textbf{WOMAN}_2 \\
F(\textit{chester}) &= \textbf{DOG} \\
F(\textit{prudence}) &= \textbf{CAT}
\end{aligned}$$

Prädikatenlogik: noch ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
F(\textit{Animal}) &= \{\textbf{DOG, CAT, MOUSE}\} \\
F(\textit{Run}) &= \{\textbf{DOG, CAT}\} \\
F(\textit{Laugh}) &= \{\textbf{MAN}_1\textbf{, WOMAN}_1\} \\
F(\textit{Howl}) &= \{\textbf{DOG}\} \\
F(\textit{Sing}) &= \{\textbf{WOMAN}_2\} \\
F(\textit{Scream}) &= \emptyset \\
F(\textit{Squeak}) &= \{\textbf{MOUSE}\} \\
F(\textit{Crazy}) &= \emptyset \\
F(\textit{Poison}) &= \{\langle\textbf{CAKE, DOG}\rangle\} \\
F(\textit{Eat}) &= \{\langle\textbf{DOG, CAKE}\rangle\}
\end{aligned}
$$

Allquantor: Interpretation

- **Notationskonvention:**

$$[t/v]\varphi$$

ist die Formel, die wie φ ist, abgesehen davon, dass alle **freien** Vorkommen der Variablen v durch t ersetzt wurden

Allquantor: Interpretation

- Intuition:

  $$\forall v \varphi$$

  ist wahr genau dann wenn $[c/v]\varphi$ wahr ist für alle Individuenkonstanten c

- Aber: in unserem Modell gilt

  $$\textit{Animal}(c) \rightarrow \textit{Run}(c)$$

  für alle Individuenkonstanten c; dennoch ist

  $$\forall x(\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x))$$

  falsch!

- Grund: die Maus „hat keinen Namen“

Allquantor: Interpretation

- besserer Ansatz: damit

$$\forall x(\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x))$$

wahr ist, muss

$$\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x)$$

wahr sein, egal, worauf sich x bezieht!

- Angenommen, $g(x) = \mathbf{MOUSE}$
- dann:

$$[\textit{Animal}(x) \rightarrow \textit{Run}(x)]^M_g = 0$$

Allquantor: Interpretation

- Vielleicht so:

$$[\forall v(\varphi)]^M = 1$$

genau dann wenn für alle g:

$$[\forall v(\varphi)]_g^M = 1$$

- Aber was ist dann mit Formeln wie

$$\forall x \neg \forall y \textit{Poison}(x, y)$$

Allquantor: Interpretation

- zwei Probleme:
  - auch quantifizierte Formeln können freie Variablen enthalten; also muss auch die Interpretation von quantifizierten Formeln von der Belegungsfunktion abhängen
  - nicht die komplette Belegungsfunktion darf variiert werden, sondern nur die Interpretation der gebundenen Variablen

Allquantor: Interpretation

- Notation:
  - sei $a \in E$ eine Objekt des Modells, v eine Variable und g eine Belegungsfunktion
  - $g[a/v]$: die Belegungsfunktion, die genau wie g ist, außer dass
$$g[a/v](v) = a$$
- endgültige Version: Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell.
$$[\forall v(\varphi)]_g^M = 1$$
genau dann wenn
$$[\varphi]_{g[a/v]}^M = 1$$
für alle $a \in E$

Existenzquantor: Interpretation

- Intuition:

$$\exists v(\varphi)$$

ist wahr, genau dann wenn für irgendeine Individuenkonstante c gilt

$$[c/v]\varphi$$

ist wahr

- aber:

$$\exists x(\textit{Squeak}(x))$$

ist wahr in unserem Modell, obwohl es keine Individuenkonstante c gibt, so dass folgendes wahr wäre:

$$\textit{Squeak}(c)$$

Existenzquantor: Interpretation

- Problem wird ebenfalls durch Umweg über Belegungsfunktion umgangen:

$$[\exists v(\varphi)]_g^M = 1$$

genau dann wenn es ein Objekte $a \in E$ gibt, so dass

$$[\varphi]_{g[a/v]}^M = 1$$

- in dem Beispiel wäre

$$[\textit{Squeak}(x)]_{g[\mathbf{MOUSE}/x]}^M = 1$$

und damit die quantifizierte Formel auch wahr

Semantik der Prädikatenlogik

Definition 3 (Semantik der Prädikatenlogik (endgült.)) *Sei $M = \langle E, F \rangle$ ein Modell und g eine Belegungsfunktion für M.*

1. $[c]_g^M = F(c)$, *wenn c eine Individuenkonstante ist*
2. $[v]_g^M = g(v)$, *wenn v eine Individuenvariable ist*
3. $[P(t_1, \ldots, t_n)]_g^M = 1$ *gdw.* $\langle [t_1]_g^M, \ldots, [t_n]_g^M \rangle \in F(P)$
4. $[\neg\varphi]_g^M = 1 - [\varphi]_g^M$
5. $[\varphi \wedge \psi]_g^M = \min([\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
6. $[\varphi \vee \psi]_g^M = \max([\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
7. $[\varphi \rightarrow \psi]_g^M = \max(1 - [\varphi]_g^M, [\psi]_g^M)$
8. $[\varphi \leftrightarrow \psi]_g^M = 1 - ([\varphi]_g^M - [\psi]_g^M)^2$
9. $[\forall v(\varphi)]_g^M = \min(\{[\varphi]_{g[a/v]}^M | a \in E\})$
10. $[\exists v(\varphi)]_g^M = \max(\{[\varphi]_{g[a/v]}^M | a \in E\})$