

## Die strukturelle Hierarchie

### Aussagenlogik

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \text{id}$$

$$\frac{X \Rightarrow A}{X, B \Rightarrow A} M$$

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow B} \wedge E(2)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \rightarrow B \quad Y \Rightarrow A}{X, Y \Rightarrow B} \rightarrow E$$

$$\frac{X \Rightarrow \neg\neg A}{X \Rightarrow A} \neg E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \vee B \quad Y, A \Rightarrow C \quad Y, B \Rightarrow C}{X, Y \Rightarrow C} \vee E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \vee B}{X \Rightarrow A} \vee I(1)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \bullet B \quad Y, A, B, Z \Rightarrow C}{Y, X, Z \Rightarrow C} \bullet E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B} \text{Cut}$$

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow A} \wedge E(1)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{X, A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{X, A \Rightarrow B \quad X, A \Rightarrow \neg B}{X \Rightarrow \neg A} \neg I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \vee B}{X \Rightarrow B} \vee I(2)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \bullet B} \bullet I$$

Die Konjunktion  $\wedge$  (manchmal auch geschrieben als  $\sqcap$ ) heißt **additiv** und die Konjunktion  $\bullet$  (auch  $\cdot$  oder  $\otimes$ ) heißt **multiplikativ**. In der klassischen und intuitionistischen Logik sind sie äquivalent.

Wenn die Sequenzen auf der linken Seite des Doppelpfeils als Formel-Sequenzen aufgefasst werden statt als Mengen, benötigt man noch weitere strukturelle Regeln:

### Strukturelle Regeln

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \text{id}$$

$$\frac{X \Rightarrow A}{X, B \Rightarrow A} M$$

$$\frac{X, A, A, Y \Rightarrow B}{X, A, Y \Rightarrow B} C$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B} \text{Cut}$$

$$\frac{X, A, B, Y \Rightarrow C}{X, B, A, Y \Rightarrow C} P$$

### Logische Regeln

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow B} \wedge E(2)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \rightarrow B \quad Y \Rightarrow A}{X, Y \Rightarrow B} \rightarrow E$$

$$\frac{X \Rightarrow \neg\neg A}{X \Rightarrow A} \neg E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \vee B \quad Y, A \Rightarrow C \quad Y, B \Rightarrow C}{X, Y \Rightarrow C} \vee E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \vee B}{X \Rightarrow A} \vee I(1)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \bullet B \quad Y, A, B, Z \Rightarrow C}{Y, X, Z \Rightarrow C} \bullet E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow A} \wedge E(1)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{X, A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{X, A \Rightarrow B \quad X, A \Rightarrow \neg B}{X \Rightarrow \neg A} \neg I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \vee B}{X \Rightarrow B} \vee I(2)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \bullet B} \bullet I$$

## Intuitionismus

### Strukturelle Regeln

$$\frac{}{A \Rightarrow A} id \quad \frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B} Cut$$

$$\frac{X \Rightarrow A}{X, B \Rightarrow A} M \quad \frac{X, A, B, Y \Rightarrow C}{X, B, A, Y \Rightarrow C} P$$

$$\frac{X, A, A, Y \Rightarrow B}{X, A, Y \Rightarrow B} C$$

### Logische Regeln

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow B} \wedge E(2) \quad \frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow A} \wedge E(1)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \rightarrow B \quad Y \Rightarrow A}{X, Y \Rightarrow B} \rightarrow E \quad \frac{X, A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad X \Rightarrow \neg A}{X \Rightarrow B} \neg E \quad \frac{X, A \Rightarrow B \quad X, A \Rightarrow \neg B}{X \Rightarrow \neg A} \neg I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \bullet B \quad Y, A, B, Z \Rightarrow C}{Y, X, Z \Rightarrow C} \bullet E \quad \frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \bullet B} \bullet I$$

## Relevanz-Logik (positives Fragment)

### Strukturelle Regeln

$$\frac{}{A \Rightarrow A} id \quad \frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B} Cut$$

$$\frac{X, A, A, Y \Rightarrow B}{X, A, Y \Rightarrow B} C \quad \frac{X, A, B, Y \Rightarrow C}{X, B, A, Y \Rightarrow C} P$$

### Logische Regeln

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow A} \wedge E(1)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \wedge B}{X \Rightarrow B} \wedge E(2) \quad \frac{X \Rightarrow A \quad X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \rightarrow B \quad Y \Rightarrow A}{X, Y \Rightarrow B} \rightarrow E \quad \frac{X, A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \bullet B \quad Y, A, B, Z \Rightarrow C}{Y, X, Z \Rightarrow C} \bullet E \quad \frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \bullet B} \bullet I$$

Lineare Logik (positives multiplikatives Fragment)

Strukturelle Regeln

$$\frac{}{A \Rightarrow A} id \quad \frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B} Cut$$

$$\frac{X, A, B, Y \Rightarrow C}{X, B, A, Y \Rightarrow C} P$$

Logische Regeln

$$\frac{X \Rightarrow A \rightarrow B \quad Y \Rightarrow A}{X, Y \Rightarrow B} \rightarrow E$$

$$\frac{X, A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \bullet B \quad Y, A, B, Z \Rightarrow C}{Y, X, Z \Rightarrow C} \bullet E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \bullet B} \bullet I$$

Lambek-Kalkül

Strukturelle Regeln

$$\frac{}{A \Rightarrow A} id \quad \frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B} Cut$$

Logische Regeln

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow A \setminus B}{X, Y \Rightarrow B} \setminus E$$

$$\frac{A, X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \setminus B} \setminus I$$

$$\frac{X \Rightarrow B / A \quad Y \Rightarrow A}{X, Y \Rightarrow B} / E$$

$$\frac{X, A \Rightarrow B}{X \Rightarrow B / A} / I$$

$$\frac{X \Rightarrow A \bullet B \quad Y, A, B, Z \Rightarrow C}{Y, X, Z \Rightarrow C} \bullet E$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \bullet B} \bullet I$$