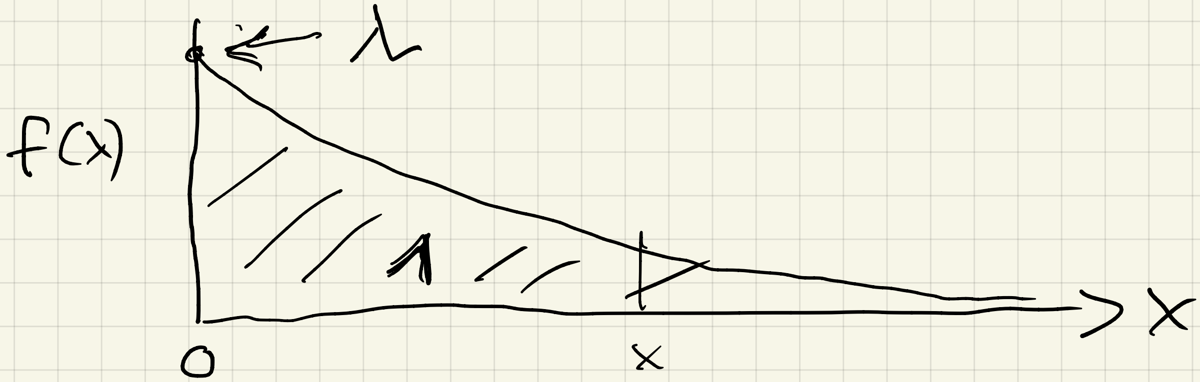
10. Mai 2019

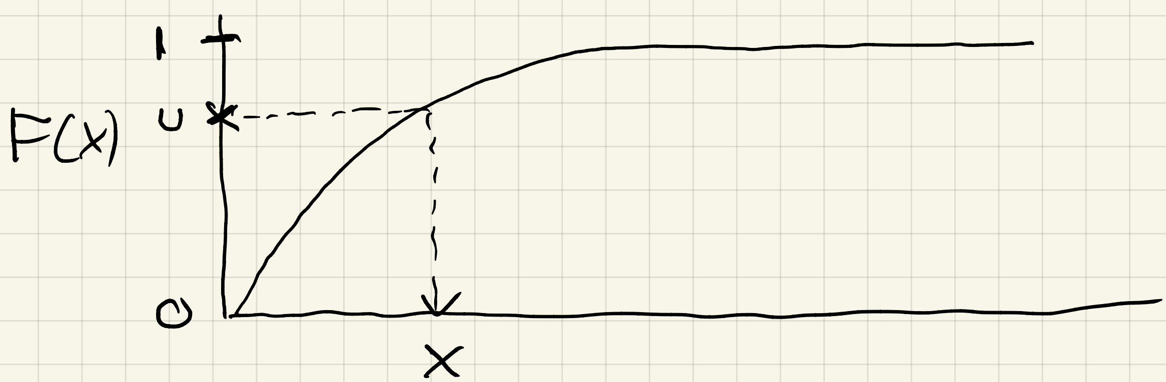
Beispiel (Exponentialverteilung)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda \cdot x} \; ; \; \lambda > 0 , \; x > 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



$$F(X) = \int_0^x f(x')\, dx' = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$



$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$u = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

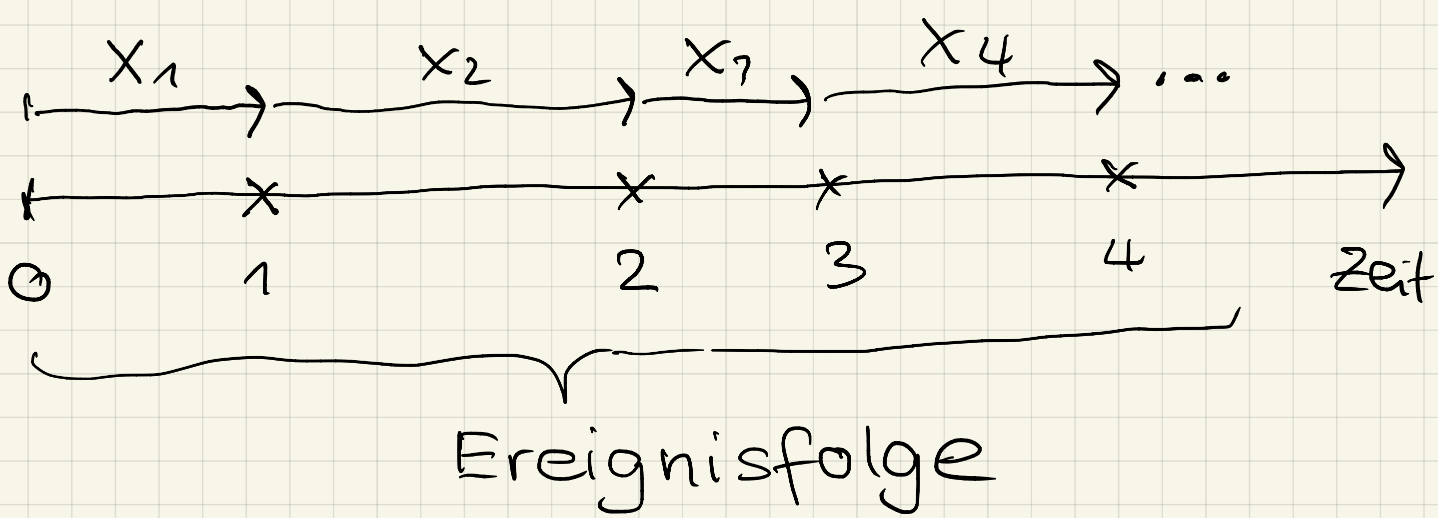
$$1 - u = e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\log(1-u) = -\lambda \cdot x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1-u) \rightarrow \boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log U}$$

□

Poisson-Prozess



$X_i \sim$ exponentialverteilt mit Rate λ $\quad i = 1, 2, 3 \ldots$

$N(t)$ gibt die Anzahl der Ereignisse in $(0, t)$ an.

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!}$$

$$E[N(t)] = \lambda \cdot t$$

$$SD(N(t)) = \sqrt{\lambda \cdot t}$$

Simulation (Homogener Prozess)

Step 1 : $t = 90$, $\lambda = 1/30$

Step 2 : $N = 0$, $S = 0$

Step 3 : $X = -\log(U)/\lambda$

Step 4 : $S = S + X$

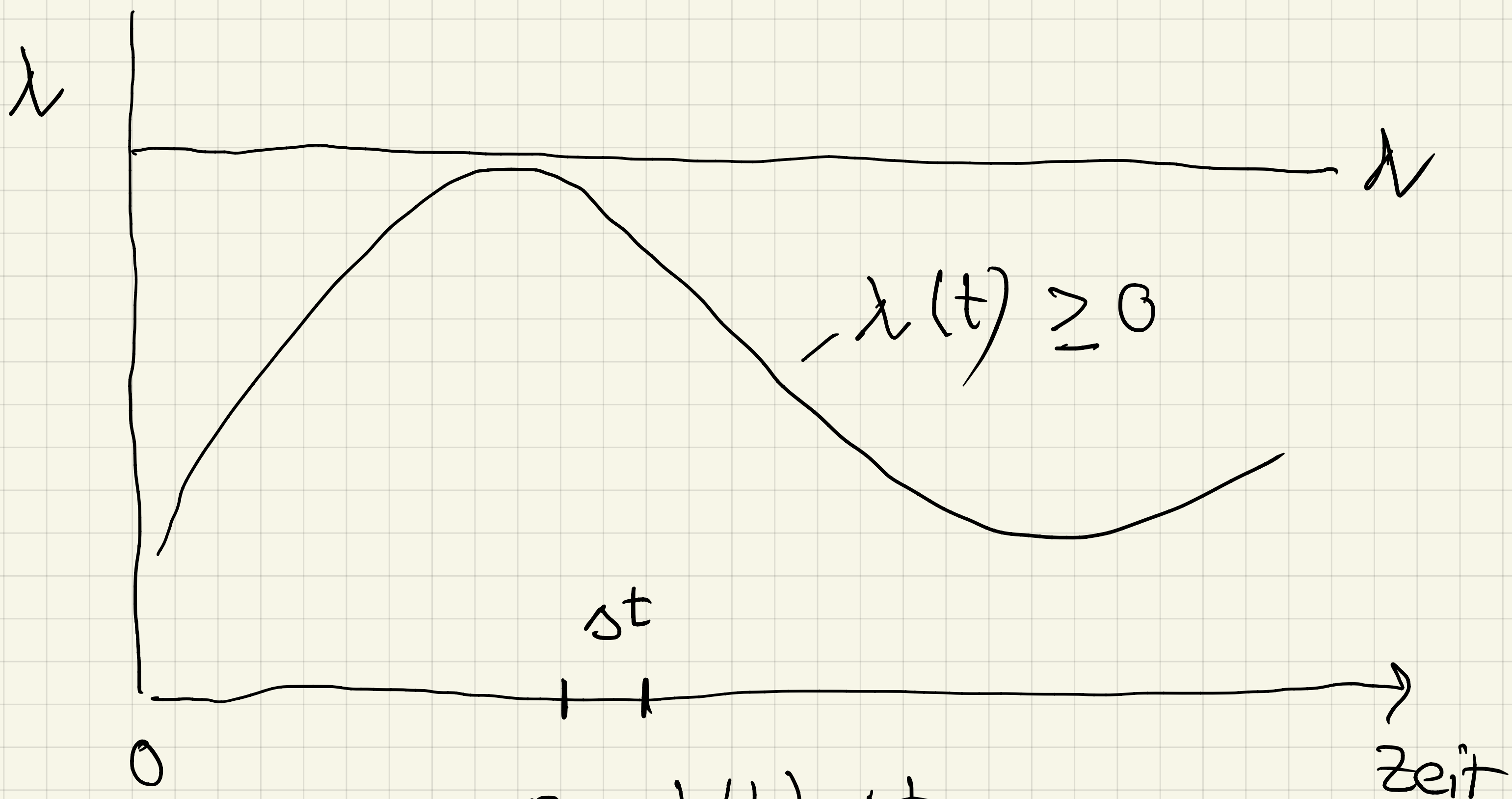
Step 5 : if $S > t$, stop

Step 6 : $N = N + 1$, $T(N) = S$

Step 7 : Goto Step 3

N ist gleich der Anzahl der Ereignisse in $(0,t)$

Nichthomogener Poisson-Prozess



$$p \approx \lambda(t) \cdot \Delta t$$

$$E(N(t)) = \int_0^t \lambda(t')\,dt' = Var(N(t))$$

$$\lambda = \max\{ \lambda(t') \mid 0 \leq t' \leq t \}$$

Beispiel

$$\lambda(t) = \sin(t) + 1 \,,$$

$$\lambda = 2$$

Step 1: $N = 0$, $S = 0$

Step 2: U_1

Step 3: $X = -\log(U_1)/\lambda$

Step 4: $S = S + X$

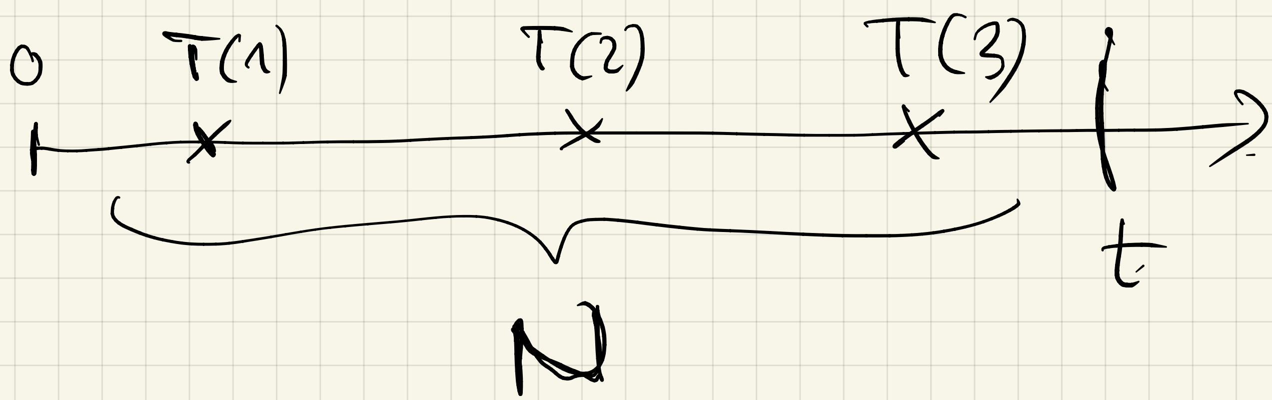
Step 5: if $S > t$, Stop

Step 6: U_2

Step 7: $U_2 \leq \dfrac{\lambda(S)}{\lambda}$, dann

$$N = N + 1$$
$$T(N) = S.$$

Step 8: Goto 2



Hausaufgabe (Abgabe Mai)

1. Simuliere einen homogenen Poisson-Prozess mit $\lambda = \frac{1}{10}$
   Bestimme damit

   a) $P(N(60) = n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 20$

   b) $E[N(60)]$ und $SD[N(60)]$

   und vergleiche diese Ergebnisse mit der analytische Lösung.

2. Die Spikefolge eines Rezeptors folgt einem inhomogen Poisson-prozess mit

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 + 0.3 \cdot t} + \frac{1}{10}$$

   Simuliere diesen Prozess für $0 \leq t \leq t$ und bestimme $E(N(5))$ und $SD(N(5))$ sowohl durch Simulation als auch analytisch.