Brownsche Bewegung

Wiener Prozess

Diffusionsprozess

- $$X_t = X_0 + \Delta z \cdot \sum_{j=1}^{\frac{t}{\Delta t}} Z_j$$

$$Z_j = \begin{cases} 1 & , \quad p = \frac{1}{2} \\ -1 & , \quad q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$X_0 = 0$ $\qquad$ Δz : Amplitude

- $E(Z_j) = 0$, $\quad Var(Z_j) = 1$

- $$X_t = \Delta z \cdot \left(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{t/\Delta t} \right)$$

$$E(X_t) = 0$$

$$Var(X_t) = \Delta z^2 \cdot \frac{t}{\Delta t}$$

a) for $\Delta z = \Delta t \to 0$

$Var(X_t) = 0$! Das geht also nicht.

b) $\Delta z^2 \cdot \frac{t}{\Delta t} = t \cdot \sigma^2$ Sinnvolle Restriktion

$\Delta z^2 = \Delta t \cdot \sigma^2$

$\Delta z = \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$ So muss man Δz ändern, wenn $\Delta t \to 0$

Daraus ~~folgt~~:

$$Var(X_t) = (\sigma \cdot \sqrt{\Delta t})^2 \cdot \frac{t}{\Delta t} = \sigma^2 \cdot t \quad \square$$

Eigenschaften:

i) $X(t) \sim N(0; \sigma^2 \cdot t)$

ii) Unabhängige Zuwächse $t > 0$

$t_1 < t_2 \dots < t_n$

$X(t_n) - X(t_{n-1});\ X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}) \dots$

$X(t_2) - X(t_1);\ X(t_1) - X(0)$

sind unabhängig

Definition. Ein stochastischer Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ heißt Brownsche Bewegung, wenn

i) $X(0) = 0$

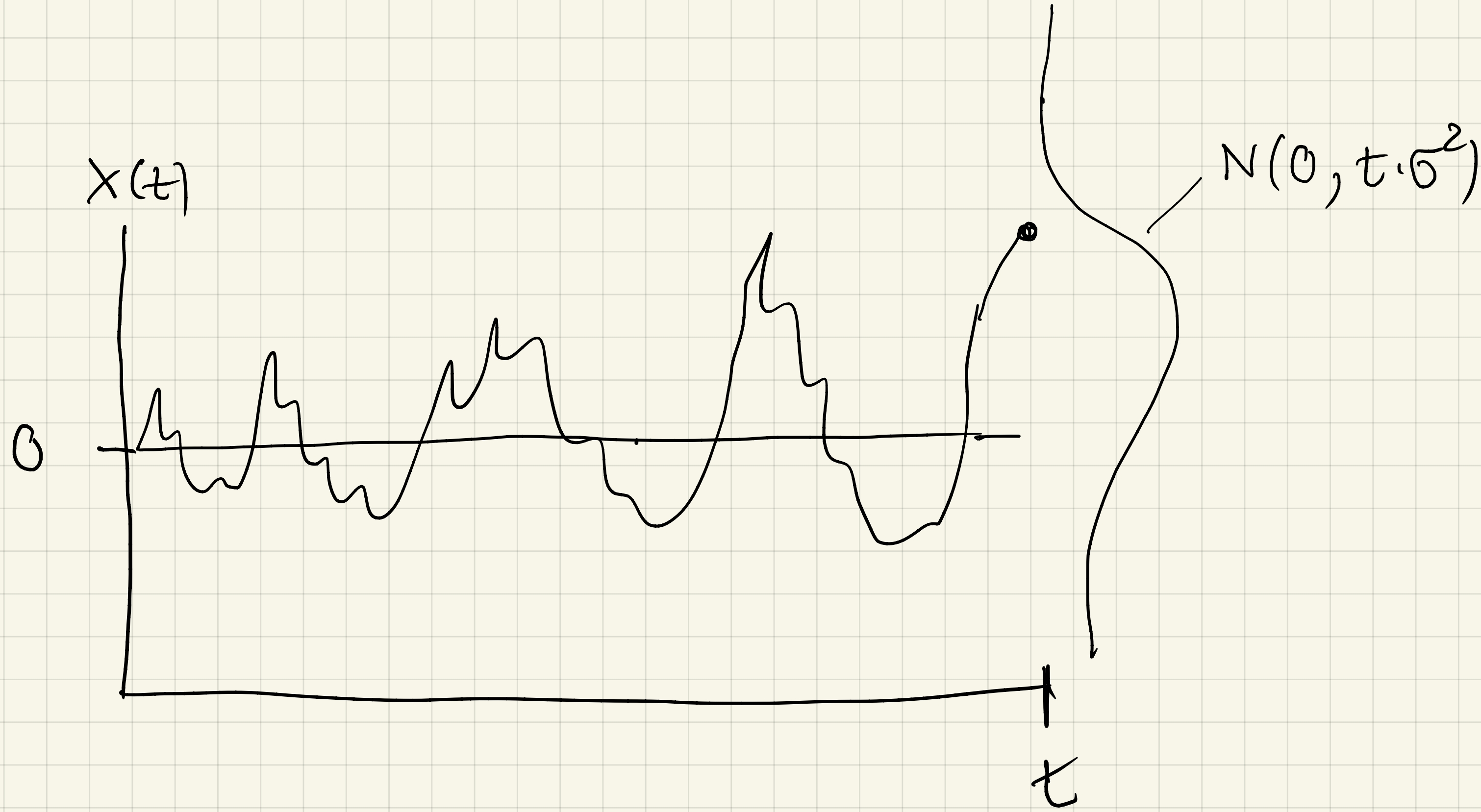
ii) $\{X(t), t > 0\}$ besitzt stationäre und unabhängige Zuwächse

iii) für jedes t, $X(t)$ ist normalverteilt mit $E[X(t)] = 0$ und $Var[X(t)] = t \cdot \sigma^2$

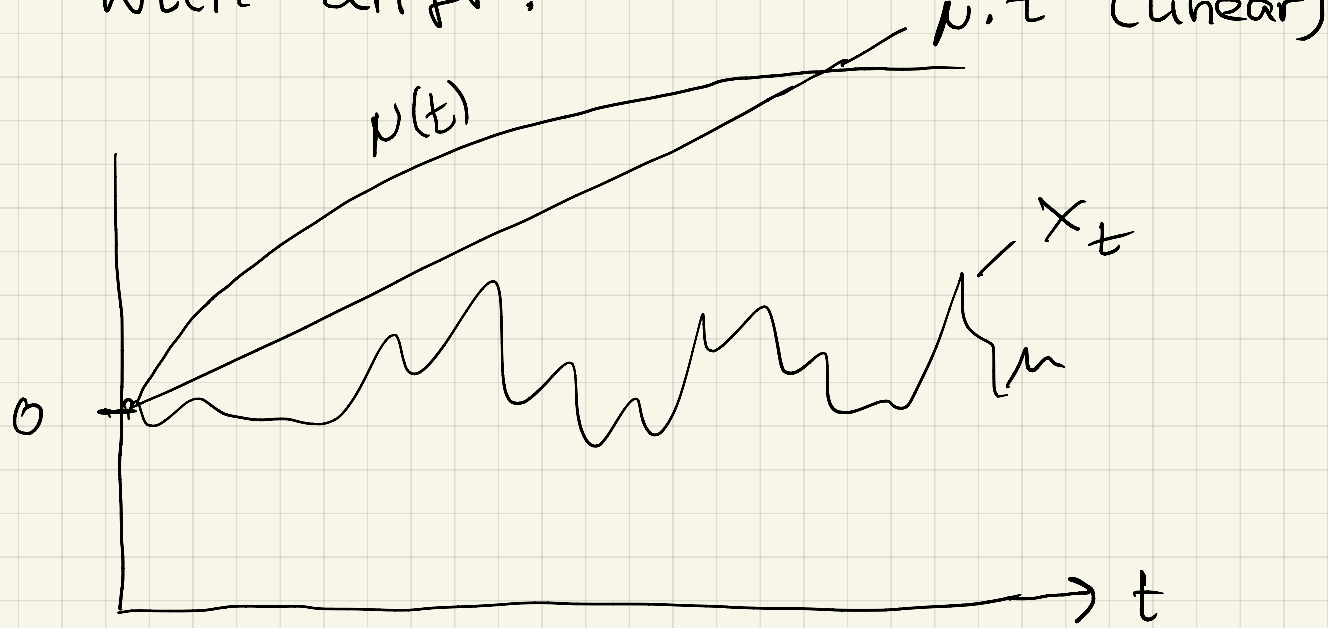
- Für $\sigma = 1$ heißt der Prozess Standard-Brownsche-Bewegung $B(t)$

Es gilt $X(t) = B(t) \cdot \sigma$

-



With drift:



$X(t) = \mu \cdot t + B(t) \cdot \sigma$, konstanter drift

$X(t) = \mu(t) + B(t) \cdot \sigma$, allgemein

Monte-Carlo Simulation (konstanter Drift)

- $X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta X_t$

  with $X_0 = S$ (Startwert)

- $\Delta X_t \sim N(\Delta t \cdot \mu, \Delta t \cdot \sigma^2)$

- $$Z_t = \frac{\Delta X_t - \Delta t \cdot \mu}{\sqrt{\Delta t} \cdot \sigma} \; ; \; Z_t \sim N(0;1)$$

  $$\Rightarrow \Delta X_t = Z_t \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma + \Delta t \cdot \mu$$

Damit ergibt sich:

- $X_{t+\Delta t} = X_t + (\Delta t \cdot \mu + \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma \cdot Z_t)$

  $t = (\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t \ldots)$

- Generell: $\mu(t)$

  $$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \cdot \mu'(t) + \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma \cdot Z_t$$

Hausaufgabe

1. Simuliere einen Wiener-Prozess mit einem linearen Drift im Intervall von $t = [0, 800\,ms]$. Die drift μ betrage dabei $\mu = 0.5$. Wiederhole die Simulation für $\sigma = 0.01$, $\sigma = 0.5$ und $\sigma = 1.0$. Verwende $\Delta t = 5\,ms$.

   Stelle den Prozess grafisch dar.

2. Ein Seil besitzt die Länge $l = 1\,m$. Am Seil wird ein schwerer Gegenstand befestigt, dabei reißt es. Die Bruchstelle X sei gleichverteilt in $[0;1]$.

   Man ist am Verhältnis der beiden Seilfragmenten X und $l - X$ interessiert $R = \frac{X}{l-X}$. Bestimme $E(R)$ per Simulation, d.h. schätze diesen Erwartungswert über $\overline{R}$ ab. Klappt das?