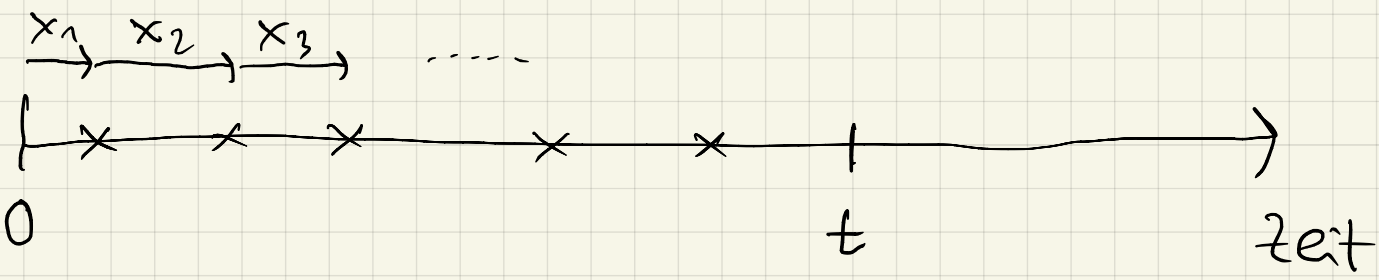
Simulation

21. Juni 2019

Hausaufgaben sind auf der letzten Seite

Poisson-Prozess

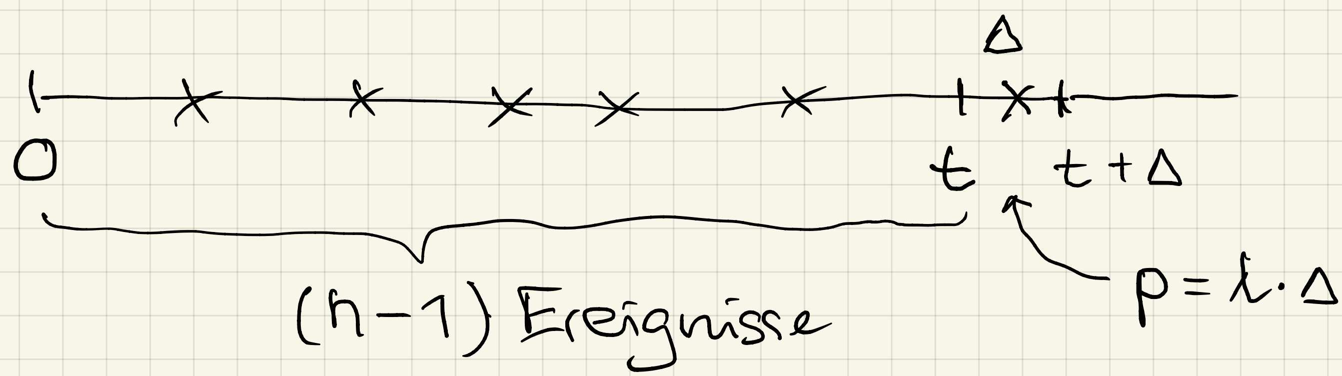


$$X_i \sim \exp(\lambda)$$

$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda \cdot t} \, \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Erlang-Verteilung (Gamma-Verteilung)

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$



$$P(t \lesssim S_n \leq t + \Delta) \approx f_{S_n}(t) \cdot \Delta$$

$$P(N(t) = n-1) \cdot \lambda \cdot \cancel{\Delta} \approx f_{S_n}(t) \cdot \cancel{\Delta}$$

$$\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \, \frac{(\lambda \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!} = f_{S_n}(t)$$

Simulation einer Erlang-RV

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log(U)$$

$$S_n = -\frac{1}{\lambda} \log(U_1) - \frac{1}{\lambda} \log(U_2) \dots$$

$$\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$$

$$S_n = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(U_1 \cdot U_2 \cdot \dots U_n)$$

□

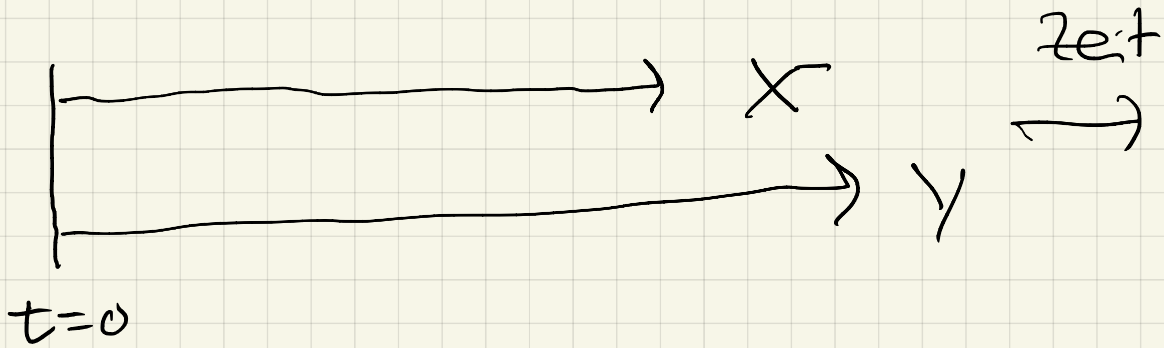
$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda} \quad ; \quad Var(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

□

Insurance Risk Model

Exkurs:

1. Gewinnwahrscheinlichkeit



$X \sim a e^{-a \cdot t}; \; Y \sim b e^{-b \cdot t}$

Satz: $P(X < Y) = \frac{a}{a+b}$

Beweis:

$$P(X<Y) = \int_0^\infty P(X<t \mid Y=t)\, P(Y=t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty [1-e^{-at}] \cdot b e^{-bt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty b e^{-bt}\, dt - \int_0^\infty b\, e^{-at} e^{-bt}\, dt$$

$$= 1 - \frac{b}{a+b} \int_0^\infty (a+b)\, e^{-(a+b)t}\, dt$$

$$= 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a+b-b}{a+b} = \frac{a}{a+b} \quad \blacksquare$$

2. Minimum

$$\min(X_1, \dots, X_n) = Y$$

$$F_Y(t) := P(Y \leq t)$$

$$= 1 - P(Y > t)$$

$$= 1 - P(X_1 > t \cap X_2 > t \dots X_n > t)$$

(stochastisch unabhängig)

$$= 1 - P(X_1 > t)\, P(X_2 > t) \dots \cdot P(X_n > t)$$

Exponentialverteilte ZVen

$$X_i \sim \exp(\lambda_i)$$

$$P(X_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda_i \cdot t}$$

$$P(X_i > t) = e^{-\lambda_i \cdot t}$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \dots e^{-\lambda_n \cdot t}$$

$$= 1 - e^{-\Sigma \lambda_i \cdot t}$$

d.h. Minimum ist auch exp-verteilt.

3. Viele parallele Prozesse

- $Y = \min(\min(\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{\mu}), \min(\underbrace{Z_1, \dots, Z_m}_{\lambda}))$

$$Y \sim \exp(n \cdot \mu + m \cdot \lambda)$$

- $P(\min(X_1, \dots, X_n) < \min(Z_1, \dots, Z_m))$

$$= \frac{n \cdot \mu}{n \cdot \mu + m \cdot \lambda}$$

- „Gewinner" bei 3 parallelen Prozessen

$$P(X \text{ gewinnt}) = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z}$$

Warum?

- Versicherungsteilnehmer melden Schaden
  - → Poissonprozess mit Rate λ
  - → Schadenshöhe $Y \sim F$
- Neue Versicherungsteilnehmer
  - → Poissonprozess mit Rate ν
- Versicherungsteilnehmer Beitragsdauer

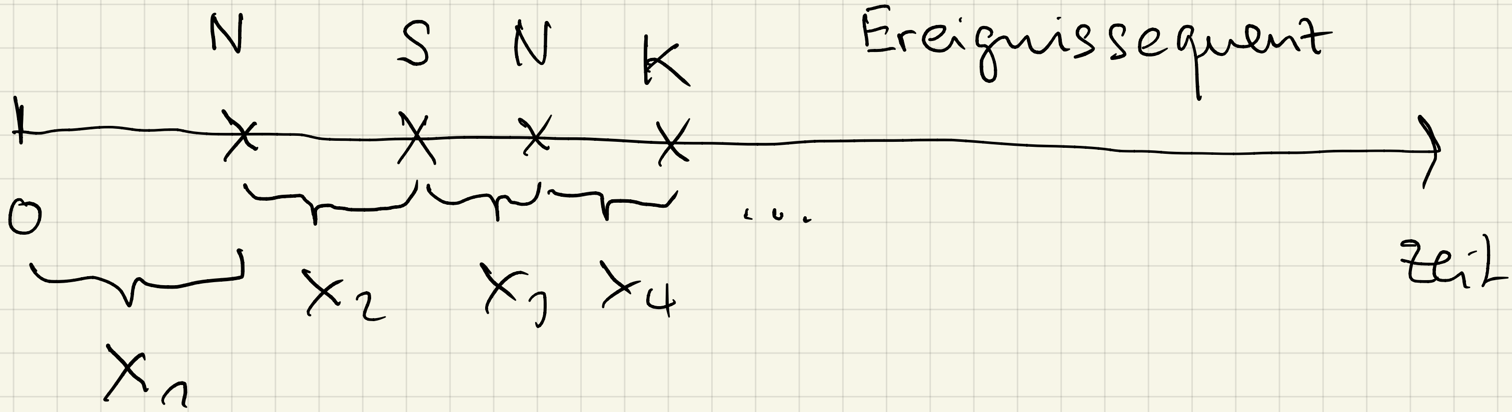
$$D \sim \exp(\mu)$$

- Jeder Teilnehmer bezahlt Prämie mit der Rate c pro Zeiteinheit
- Start der Simulation

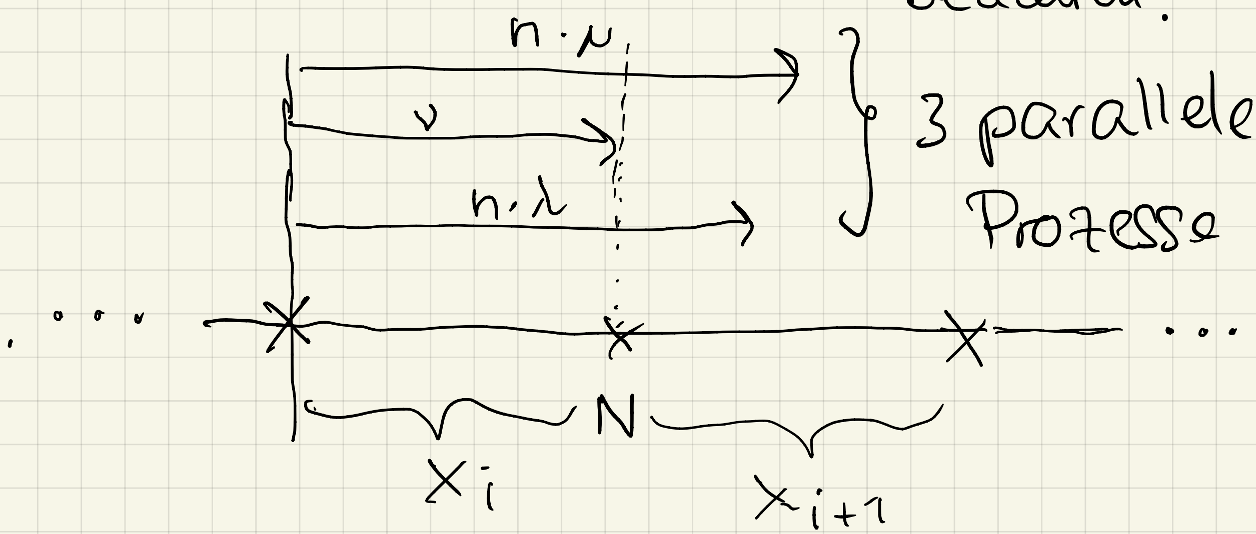
  n_0: #Versicherungsteilnehmer

  $a_0 \geq 0$: Anfangskapital

- Problem: Ist $a > 0$ für eine Zeitspanne für T?



Markov-Eigenschaft beachten!



$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\nu + n\cdot\mu + n\cdot\lambda)$$

$$P(N) = \frac{\nu}{\nu + n\cdot\mu + n\cdot\lambda}$$ Neuer Kunde

$$P(S) = \frac{n\cdot\lambda}{\nu + n\cdot\mu + n\cdot\lambda}$$ Schaden

$$P(K) = \frac{n\cdot\mu}{\nu + n\cdot\mu + n\cdot\lambda}$$ Kündigung

Simulation

Anfangsbedingung

$t = 0$

$a = a_0$: Startkapital

$n = n_0$: Kunden bei $t = 0$

$t_E = X$: Erstes Ereignis

$I = 1$ (Indikator)

While $t_E \leq T$

$a = a + n \cdot c \cdot (t_E - t)$

$t = t_E$

Compute $P(N), P(S), P(K)$

Generate Draw from $\{N, S, K\}$

N: $n = n + 1$

K: $n = n - 1$

S: Generate Y

If $Y > a$

$I = 0$; Terminate run.

Else

$a = a - Y$.

Generate X; $t_E = t + X$.

End

Outcomes: $I = 0$ (pleite) $a < 0$

$I = 1$: Gewinn $= a - a_0$

$\square$

Hausaufgabe (Abgabe: in 2 Wochen)

1. Simuliere Erlangverteilung
   $n = 10$, $\lambda = \frac{1}{30}$

2. X, Y, Z sind exponentiale ZVen mit den Raten $\lambda_X = \frac{1}{100}$, $\lambda_Y = \frac{1}{150}$ und $\lambda_Z = \frac{1}{200}$.

   a) Bestimme (analytisch) der Erwartungswert von: X, Y, Z und $S = \min(X, Y, Z)$.

   b) Wie groß ist die Wk, dass X das Minimum ist?

3. Schreibe ein Script, um das Risk Insurance Model zu simulieren.

   a) Wähle „plausible" Parameterwerte und bestimme $\overline{I}$ d.h. die Risikorate.

   b) Wähle „plausible" Parameter, sodass $\overline{I} > 90\%$ und bestimme dazu den erwarteten Gewinn $= \overline{a} - a_0$