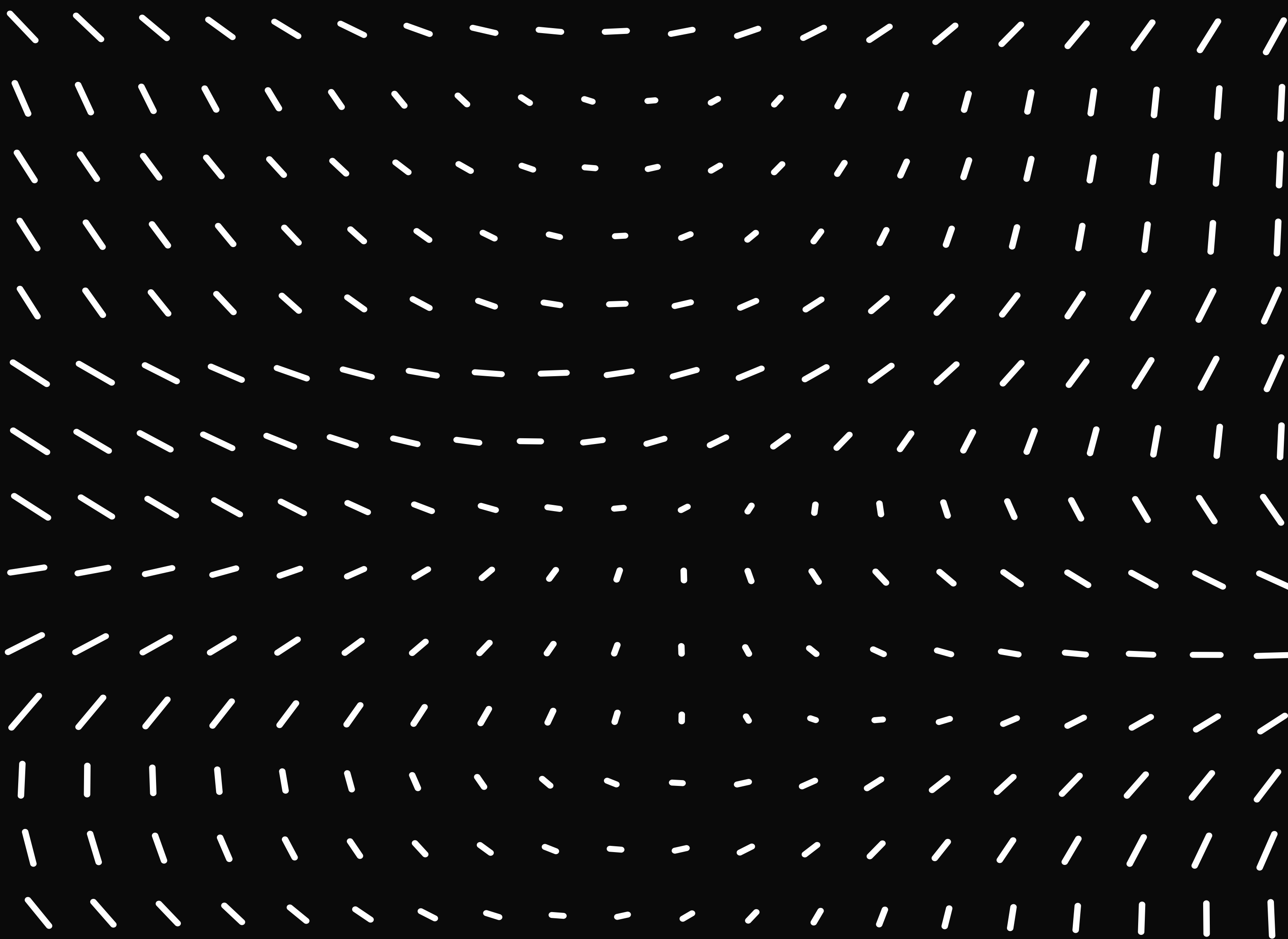


Varianzreduktion

$$E[g(X)] = \theta$$

Beispiel

$$g(x) = \frac{20}{1+x^2}$$

$X \sim$ gleichverteilt übe $(0,1)$

$$\theta = E[g(x)] = \int_0^1 \frac{20}{1+x^2} \cdot \underbrace{f_X(x)}_{1} \cdot dx$$

$$= 15.7080$$

Standard-Simulation

$U_1, U_2, \ldots, U_N$

$Y_1 = g(U_1)$, $Y_2 = g(U_2)$ $\ldots$, $Y_N = g(U_N)$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum Y_i}{N} \;; \; Var(\hat{\theta}) = \frac{\cancel{N} \cdot var(Y)}{N^{\cancel{2}}} = \frac{var(Y)}{N}$$

Entgegengesehe Variablen

$$Y^* = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

$$\mathrm{Var}(Y^*) = \mathrm{Var}\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \mathrm{var}(Y_1 + Y_2)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{var}(Y) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(Y_1, Y_2)\right]$$

$$= \frac{\mathrm{var}(Y)}{2} + \frac{\mathrm{cov}(Y_1, Y_2)}{2}$$

Y_1 und Y_2 sind negativ assoziiert

$$\mathrm{var}\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) < \frac{\mathrm{var}(Y)}{2} \quad !$$

Entgegengesetze Variablen!

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= g(U) \\ Y_2 &= g(1-U) \end{aligned}\right\} \quad Y_1^* = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

Simulation

Step 1: $i = 0$; $N = 1000$

Step 2: Generiere U, $i = i+1$

Step 3: $Y_1 = g(U)$; $Y_2 = g(1-U)$

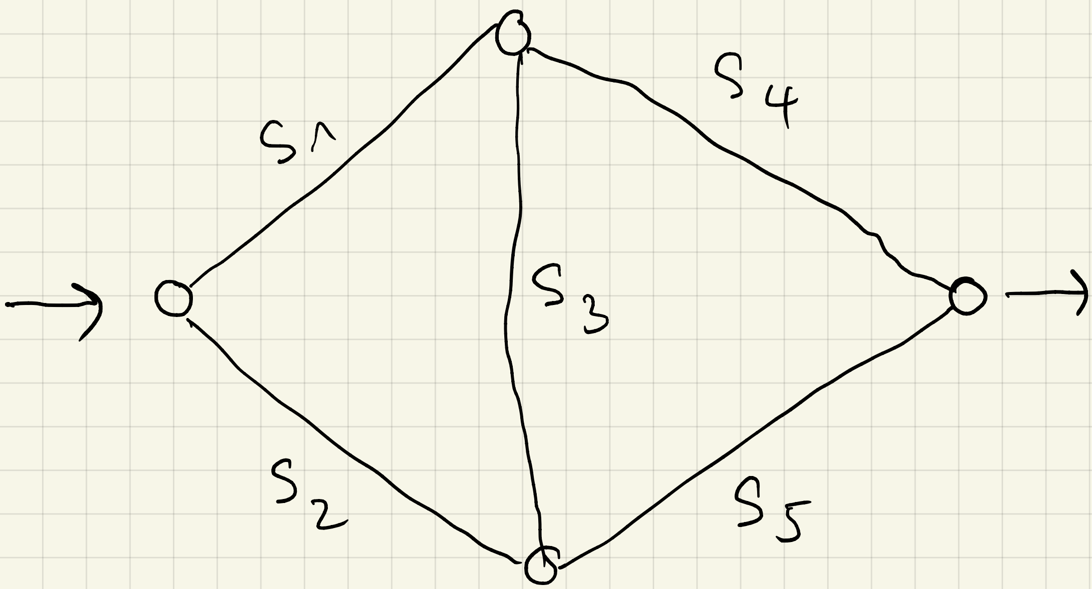
Step 4: $Y_i^* = (Y_1 + Y_2)/2$

Step 5: if $i < N$, Gehe zu 2

Step 6: $\hat{\Theta} = \text{mean}(Y^*)$

$SE = SD(Y^*)/\sqrt{n}$

	N	$\hat{\Theta}$	SE
Standard-methode	1000	15.810	0.102
Entgegengesetzt	1000	15.701	0.009



$$S_i = \begin{cases} 0, & \text{nicht befahrbar}, \quad 1-p_i \\ 1, & \text{befahrbar}, \quad p_i \end{cases}$$

$$s_1 \cdot s_4 \qquad \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$s_2 \cdot s_5 \qquad \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$s_1 \cdot s_3 \cdot s_5 \qquad \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 \qquad \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\phi(s_1 \ldots s_5) = \max(s_1 \cdot s_4,\ s_2 \cdot s_5,\ s_1 \cdot s_2 \cdot s_5,\ s_2 \cdot s_3 \cdot s_4)$$

k-of-n System

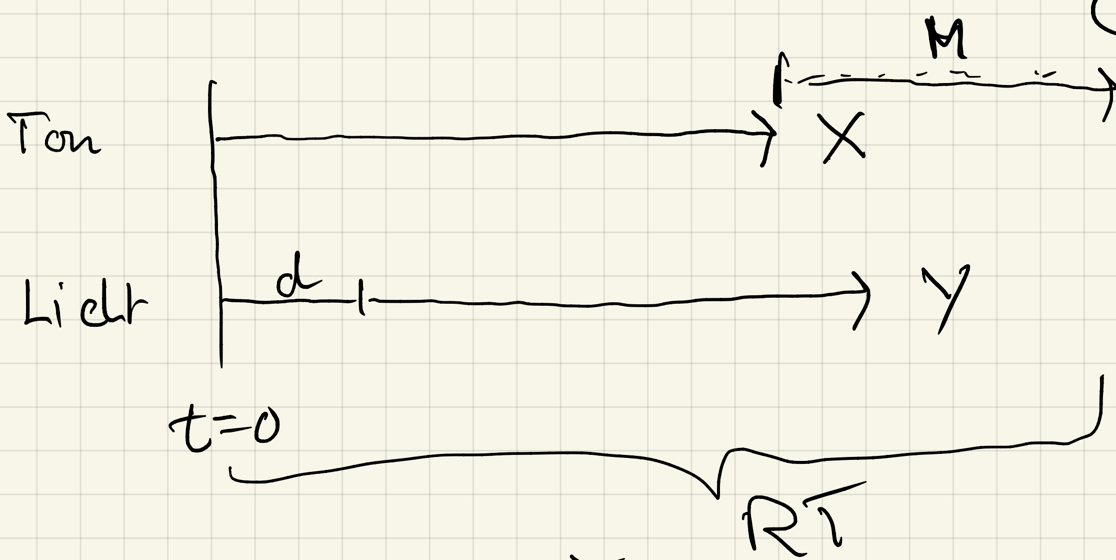
$$\phi(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^{n} s_i \geq k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

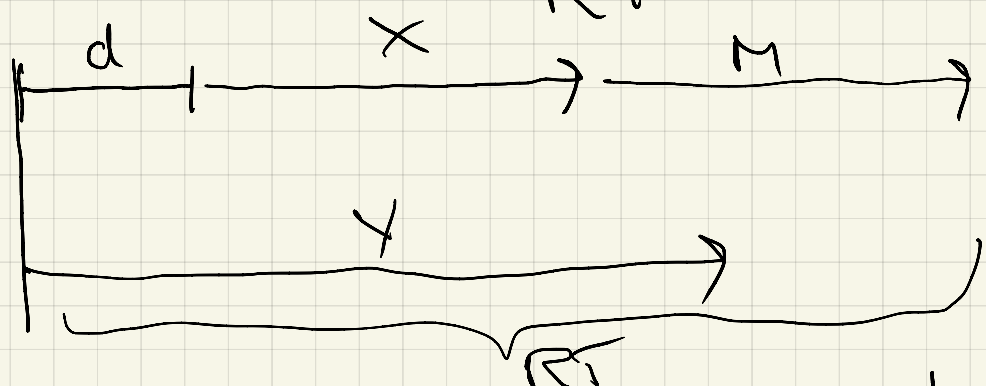
$k = 3$

$n = 8$

$p = (p_1, \dots, p_8)$

Wettlaufmodelle (Ulrich & Miller 97, JMP)





$$RT = \begin{cases} \min(X, Y+d_y) + M & d_y \geq 0 \\ \min(X+d_x, Y) + M & d_x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} X & : & X = F^{-1}(U_1) \\ Y & : & Y = G^{-1}(U_2) \\ M & : & M = H^{-1}(U_3) \end{array} \qquad U = (U_1, U_2, U_3)$$

$$RT^* = [RT(U), RT(1-U)]/2$$

Generell:

$$Y_1 = g[F_1^{-1}(U_1), \ldots, F_n^{-1}(U_n)]$$

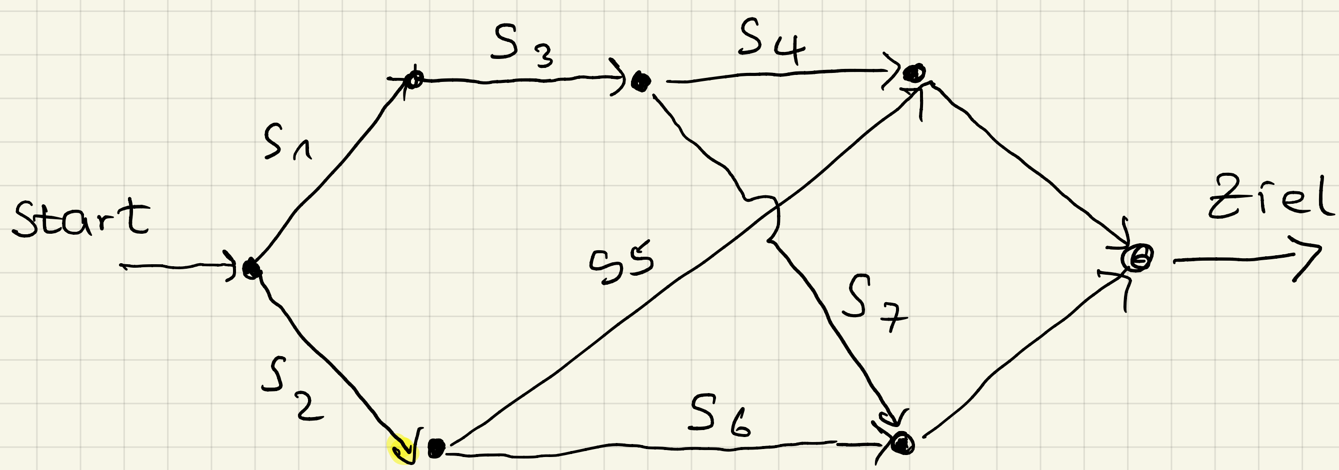
$$Y_2 = g[F_1^{-1}(1-U_1), \ldots, F_n^{-1}(1-U_n)]$$

$$Y^* = \frac{Y_1 + Y_2}{2} .$$

Simuliere $Y_1^*, Y_2^*, \ldots, Y_N^*$

$$\hat{\theta} = \overline{Y}^* \quad \text{mit} \quad SE(\hat{\theta}) = \frac{SD(Y^*)}{N} .$$

Hausaufgabe: (Abgabe in 2 Wochen)



mit

$$p = (0.5, 0.7, 0.8, 0.5, 0.6, 0.8, 0.3)$$

a) Wie groß ist die WK, dass man vom Start zum Ziel kommt? Schätzen Sie die WK mit einer Simulation mit $N = 1000$ runs ab. Benutzen Sie dabei entgegengesetzte Zufallsvariablen.

b) Wieviele runs benötigt man bei einer herkömmlichen Simulation, um eine vergleichbare Präzision der Schätzung zu erzielen?