3.5.19

Diskrete Gleichverteilung

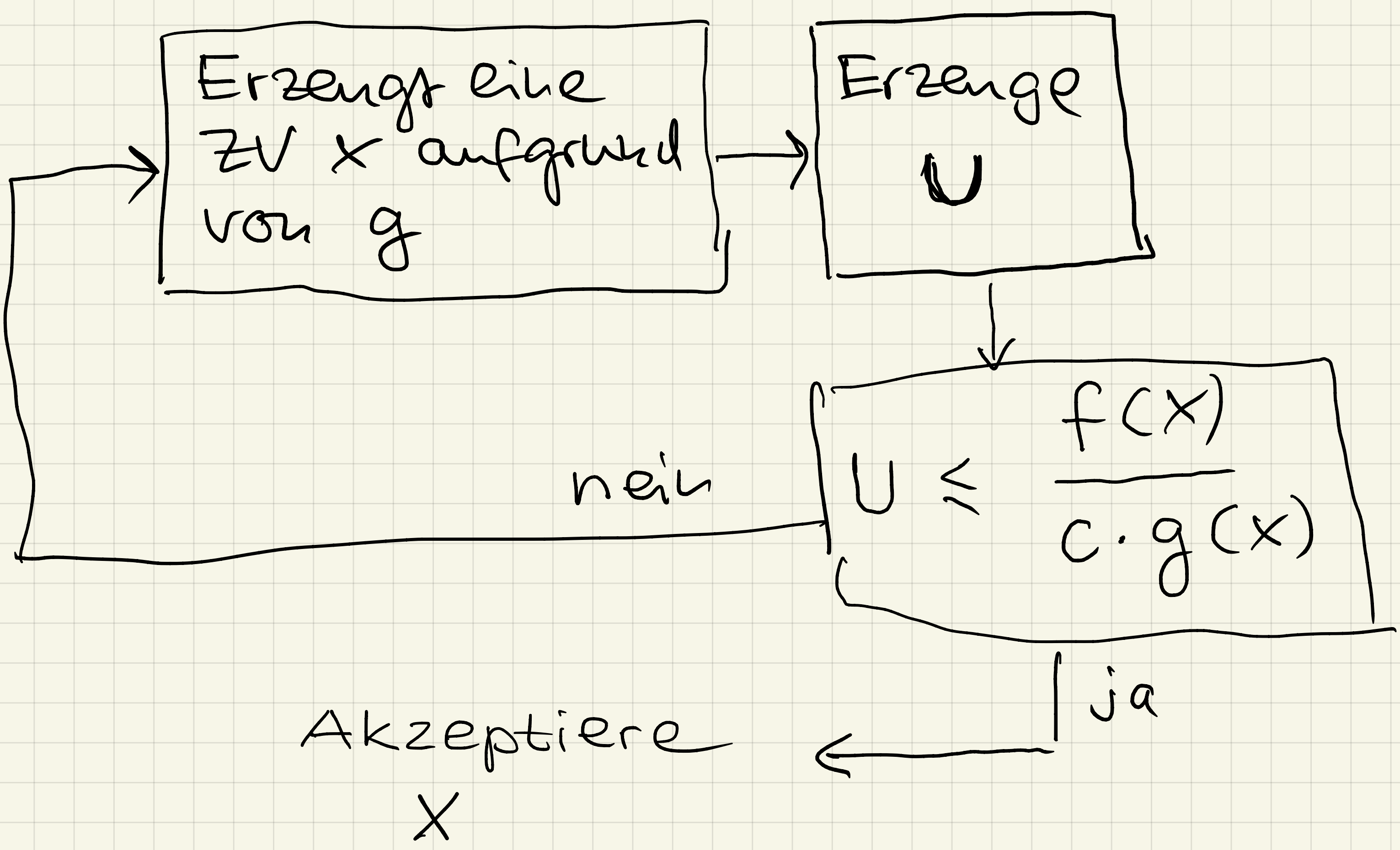
$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x = 1, \ldots, n$$

$$X = \lfloor n \cdot U \rfloor + 1$$

Verwerfungsmethode (von Neumann)

f sei eine Wahrscheinlichkeits-verteilung. Zu dieser soll ZVen generiert werden.

g sei eine Hilfsverteilung für die sich ZVen leicht generieren lassen.



Im Mittel sind c Iterationen notwendig. $\Rightarrow c$ möglichst klein wählen!

$$c \geq \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x$$

x	1	2	3	4	5
f	.1	.2	.5	.05	.15
g	.2	.2	.2	.2	.2
$\frac{f}{g}$	$\frac{1}{2}$	1	2.5	.25	.75

Step 1: U_1, $x = \lfloor 5 \cdot U_1 \rfloor + 1$

Step 2: U_2

Step 3: if $U_2 \leq \frac{f(x)}{.2 \cdot 2.5}$

akzeptiere x

sonst zurück zu

Step 1

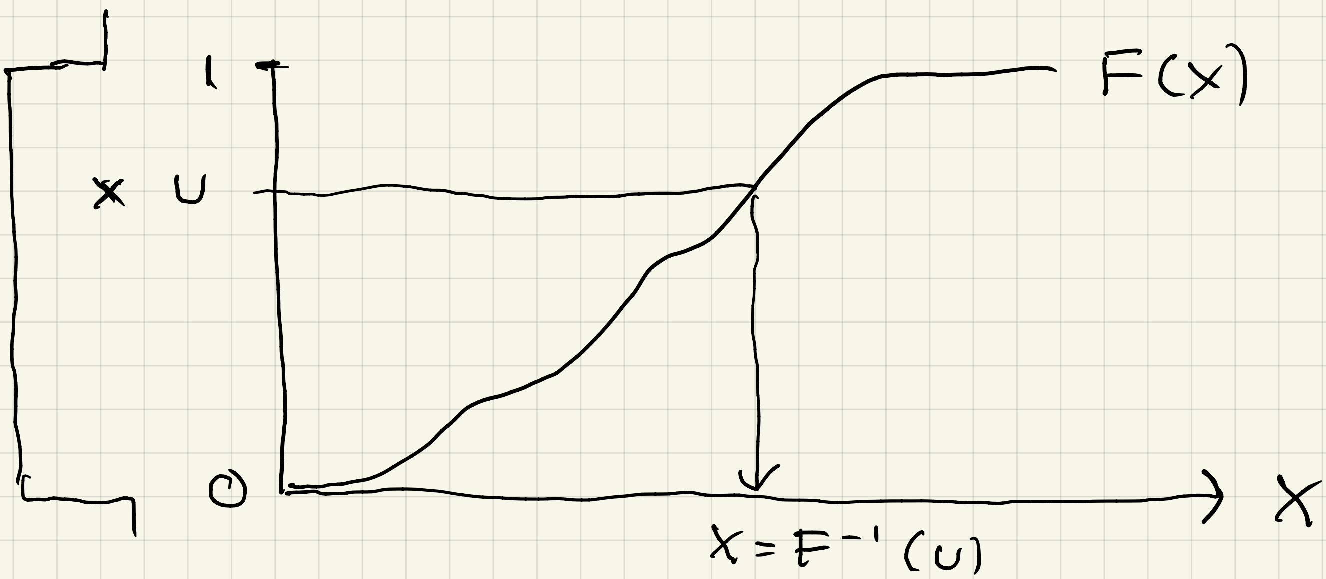
Kontinuierliche ZVen

1. Inversionsmethode

$F(x)$ sei eine Verteilungsfkt. der Zufallsvariablen X.

Theorem U gleichverteilt in $(0,1)$

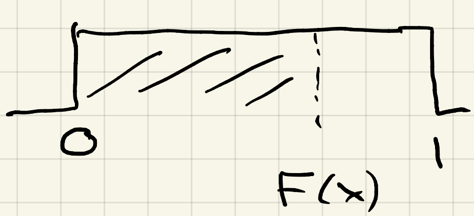
Dann gilt $X = F^{-1}(U)$



$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= P(F^{-1}(U) \leq x)$$

$$= P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x))$$



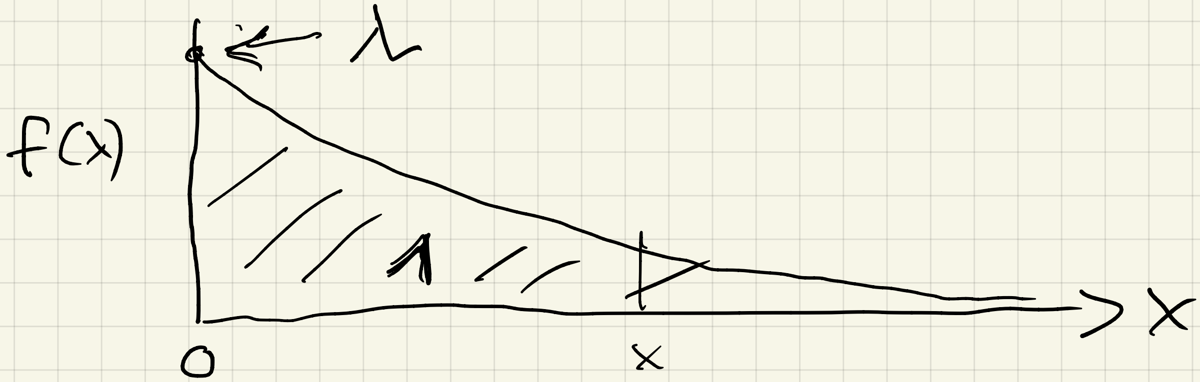
$$= P(U \leq F(x))$$

$$= F(x) \qquad \square$$

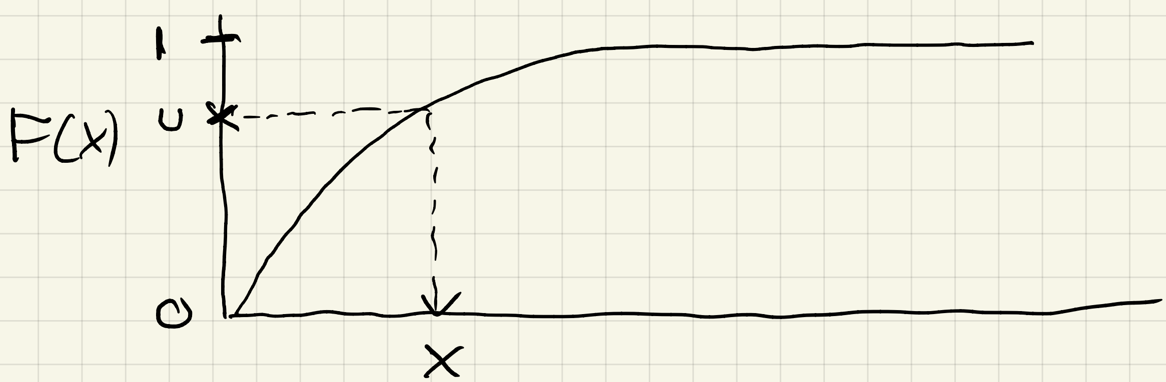
Beispiel (Exponentialverteilung)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda \cdot x} \; ; \; \lambda > 0, \; x > 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



$$F(x) = \int_0^x f(x')\,dx' = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$



$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$u = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

$$1 - u = e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\log(1-u) = -\lambda \cdot x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1-u) \rightarrow \boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log U}$$

$\square$

2. Verwerfungsmethode

f: Dichte von X

g: Dichte von Y (Hilfsdichte)

Step 1: Erzeuge Y mit Hilfe von g

Step 2: Erzeuge U

Step 3: If $U \leq \dfrac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}$

$$X = Y$$

$$\frac{f(Y)}{g(Y)} \leq c$$

Else Step 1

$\square$

Hausaufgaben (Abgabe im Mai)

1. Folgende Dichtefunktion ist gegeben

$$f(x) = \frac{e^x}{e-1} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

a) Beschreibe ein Verfahren, um für diese Verteilung Pseudozufalls-zahlen zu generieren.

b) Generiere Pseudozufallsvariablen für diese Dichtefunktion

2. Wiederhole Aufgabe 1 für

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha \cdot x^{\beta}} \qquad 0 < x < \infty$$
$$\alpha, \beta > 0$$

3. Eine Versicherungsgesellschaft hat 1000 Versicherungsnehmer. Jeder wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.05$ eine Forderung im nächsten Monat stellen. Die Forderungen sind exponential mit dem Erwartungswert 800 € verteilt. Verwenden Sie eine Simulation, um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass die Summe dieser Forderungen den Betrag 100 000 € übersteigt.