

Formale Methoden 1

Gerhard Jäger

Gerhard.Jaeger@uni-bielefeld.de

Uni Bielefeld, WS 2007/2008

24. Oktober 2007

Mengen

Georg Cantor (1845-1918)

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' genannt werden) zu einem Ganzen.“

- Jedes wohldefinierte Objekte kann Element einer Menge sein.
- Insbesondere können Mengen selber Element von Mengen sein.
- Frage „Element oder nicht?“ muss lediglich im Prinzip klar beantwortbar sein.
- Mengen können endlich oder unendlich sein.

Mengen

- besondere Mengen:
 - Einermengen (enthalten genau ein Element): $\{a\}$
 - die leere Menge (enthält keine Elemente): \emptyset (auch geschrieben als 0 oder $\{\}$)
- Notationskonventionen:
 - A, B, C, \dots : Variable über Mengen
 - a, b, c, \dots, x, y, z : Variable über Elemente von Mengen
 - $a \in A$: a ist Element von A
 - $a \notin A$: a ist kein Element von A
 - *wichtig*: da Mengen auch Elemente von anderen Mengen sein können, treten auch Ausdrücke wie $A \in B$ auf

Spezifikation von Mengen

- vier Arten, Mengen zu spezifizieren:
 - Listen-Notation
 - Aussonderungs-Notation
 - rekursive Definition
 - mengentheoretische Operationen

Spezifikation von Mengen: Listen-Notation

- nur bei endlichen Mengen anwendbar
- Namen der Elemente werden zwischen geschweiften Klammern aufgelistet
- Beispiel:

$$A = \{\textit{die Wolga, Konrad Adenauer, 16}\}$$

- kann auch geschrieben werden als:

$$A = \{\textit{Europas längster Fluss, der erste Kanzler der Bundesrepublik, die Anzahl der Bundesländer}\}$$

- Reihenfolge ist unerheblich:

$$A = \{\textit{16, die Wolga, Konrad Adenauer}\}$$

Spezifikation von Methoden: Listen-Notation

- auch unerheblich, wie häufig ein Objekt in der Listen-Notation erwähnt wird:

$A = \{\textit{der erste Vorsitzende der CDU, Konrad Adenauer, der erste Bundeskanzler, } 4^2, 16, \textit{ die Wolga, } \sqrt{256}\}$

Spezifikation von Mengen: Aussonderung-Notation

- Menge aller Objekte eines vorgegebenen Definitionsbereichs, die eine bestimmte Eigenschaft haben
- Definitionsbereich ist ebenfalls Menge
- Definitionsbereich muss wohldefiniert sein, bevor er in der Spezifikation weiterer Mengen verwendet werden kann
- Schreibweise:
 { Variable \in Definitionsbereich | Satz, der Variable enthält }
oder
 { Variable \in Definitionsbereich : Satz, der Variable enthält }

Spezifikation von Mengen: Aussonderungs-Notation

- Beispiele:
 - $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$
 - $\{x \in \mathbb{N} \mid x - 10 \geq 0\}$
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$
- Definitionsbereich wird häufig nicht angegeben, wenn er aus dem Kontext klar ersichtlich ist

Russells Paradox

Warum ist es so wichtig, bei Spezifikation einer Menge durch eine definierende Eigenschaft immer einen Definitionsbereich anzugeben? Der englische Philosoph Bertrand Russel zeigte 2001, dass andernfalls (durch sogenannte „unbeschränkte Komprehension“) Widersprüche abgeleitet werden können. Betrachte zum Beispiel:

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Gilt jetzt

$$R \in R?$$

Angenommen, $R \in R$. Dann muss R die definierende Eigenschaft haben, also $R \notin R$. Wenn andererseits $R \notin R$, dann hat R selbst die definierende Eigenschaft, also $R \in R$. In jedem Fall entsteht ein Widerspruch.

Es hilft nicht zu verbieten, dass eine Menge sich selbst enthält. Dann wäre R nämlich die Menge aller Mengen, die sich dann eben doch selber enthalten müsste.

Russells Paradox

Die heute allgemein übliche Auflösung des Paradoxes besteht darin zu sagen dass (contra Cantor) eben doch nicht alle definierbaren Gesamtheiten von Objekten Mengen sind. Ob eine Gesamtheit von Objekten eine Menge ist, muss zunächst bewiesen werden. Insbesondere bildet die Gesamtheit aller Mengen selber keine Menge.

Die hier vorgestellten Arten der Spezifikation von Mengen produziert nur Gesamtheiten, die tatsächlich beweisbar Mengen sind.

Spezifikation von Mengen: rekursive Definition

- besteht aus drei Komponenten:
 - ① Aufzählung von endlich vielen Elementen, die zu der zu definierenden Menge gehören
 - ② Regeln, die es erlauben, aus Elementen der Menge neue Elemente zu erzeugen
 - ③ Feststellung, dass alle Elemente der Menge durch endlich viele Anwendungen von Regeln aus (2) auf die in (1) genannten Elemente erzeugt werden können

Spezifikation von Mengen: rekursive Definition

- Beispiel:

- ① $4 \in E$
- ② Wenn $x \in E$, dann $x + 2 \in E$.
- ③ Nichts anderes gehört zu E .

alternative Definition durch Aussonderung:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade und } x \geq 4\}$$

- weiteres Beispiel:

- Dschingis Khan $\in D$
- Wenn $x \in D$ und y ein Sohn von x ist, dann $y \in D$.
- Nichts anderes gehört zu D .

D ist die Menge, die aus Dschingis Khan und allen seinen männlichen Nachkommen besteht.

Mengentheoretische Operationen: Vereinigungsmenge

- $A \cup B$: Vereinigungsmenge (oder einfach „Vereinigung“) von A und B
- Menge aller Objekte, die Element von A oder von B (oder von beiden) sind
- Beispiele: Sei $K = \{a, b\}$, $L = \{c, d\}$ und $M = \{b, d\}$

$$K \cup L = \{a, b, c, d\}$$

$$K \cup M = \{a, b, d\}$$

$$L \cup M = \{b, c, d\}$$

$$(K \cup L) \cup M = K \cup (L \cup M) = \{a, b, c, d\}$$

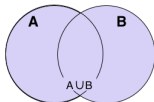
$$K \cup \emptyset = \{a, b\} = K$$

$$L \cup \emptyset = \{c, d\} = L$$

- Wenn A eine Menge von Mengen ist, schreiben wir $\bigcup A$ für die Vereinigung aller Elemente von A . Statt $B \cup C$ könnte man also auch $\bigcup\{B, C\}$ schreiben.

Mengentheoretische Operationen: Vereinigungsmenge

Darstellung in Venn-Diagrammen



Mengentheoretische Operationen: Schnittmenge

- $A \cap B$: Schnittmenge von A und B
- Menge der Objekte, die sowohl Element von A als auch von B sind
- Beispiele: Sei $K = \{a, b\}$, $L = \{c, d\}$ und $M = \{b, d\}$

$$K \cap L = \emptyset$$

$$L \cap M = \{d\}$$

$$K \cup K = \{a, b\} = K$$

$$K \cap \emptyset = \emptyset$$

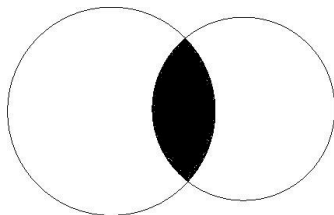
$$(K \cap L) \cap M = K \cap (L \cap M) = \emptyset$$

$$K \cap (L \cup M) = \{b\}$$

- Auch die Schnittmengenbildung kann auf beliebige Mengen von Mengen verallgemeinert werden. $\bigcap A$ ist die Menge aller Objekte, die ein Element aller Elemente von A sind.

Mengentheoretische Operationen: Schnittmenge

Darstellung in Venn-Diagrammen



Mengentheoretische Operationen: Differenzmenge

- $A - B$ (auch geschrieben als $A \setminus B$: Differenz von A und B)
- Menge der Objekte, die Element von A sind, aber nicht von B
- Beispiele: Sei $K = \{a, b\}$, $L = \{c, d\}$ und $M = \{b, d\}$

$$K - M = \{a\}$$

$$L - K = \{c, d\} = L$$

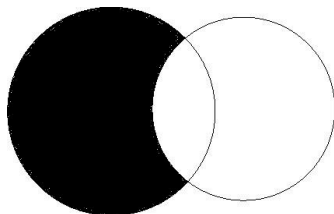
$$M - L = \{b\}$$

$$K - \emptyset = \{a, b\} = K$$

$$\emptyset - K = \emptyset$$

Mengentheoretische Operationen: Differenzmenge

Darstellung in Venn-Diagrammen

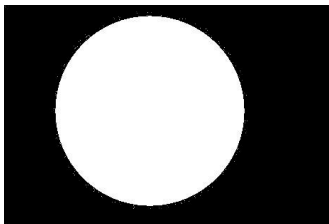


Mengentheoretische Operationen: Differenzmenge

- A' (auch geschrieben als \bar{A} oder $-A$: Komplementmenge von A)
- Menge der Objekte, die nicht Element von A sind
- Nur wohldefiniert hinsichtlich eine (üblicherweise implizit gelassenen) Universums U
- präzisere Schreibweise: $U - A$

Mengentheoretische Operationen: Komplementmenge

Darstellung in Venn-Diagrammen



Identität von Mengen

- die selbe Menge kann auf viele verschiedene Arten definiert werden
- z.B.:
 - ① $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - ② $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ und } x < 6\}$
 - ③ $1 \in A$; wenn $x \in A$ und $x < 5$, dann $x + 1 \in A$; nichts sonst ist in A

Wann beschreiben zwei Spezifikationen die selbe Menge?

Identität von Mengen

Zwei Mengen sind identisch genau dann wenn sie die selben Elemente haben.

In anderen Worten: $A = B$ gdw. jedes Element von A auch ein Element von B ist, und jedes Element von B auch ein Element von A ist.

Teilmengen

- $A \subseteq B$: A ist eine Teilmenge von B
- Jedes Element von A ist auch ein Element von B .
- B kann außerdem noch mehr Elemente haben als die von A , aber das ist nicht zwingend notwendig.
- $A \not\subseteq B$: A ist keine Teilmenge von B .
- $A \subset B$: A ist eine *echte* Teilmenge von B
- A ist Teilmenge von B , und B enthält darüber hinaus noch weitere Elemente.
- Anders ausgedrückt:

$$A \subset B \text{ gdw. } A \subseteq B \text{ und } B \not\subseteq A$$

Teilmengen

- $A \supseteq B$: A ist eine Übermenge von B
- $A \supseteq B$ gdw. $B \subseteq A$

Teilmengen

Beispiele:

- 1 $\{a, b, c\} \subseteq \{s, b, a, e, g, i, c\}$
- 2 $\{a, b, j\} \not\subseteq \{s, b, a, e, g, i, c\}$
- 3 $\{a, b, c\} \subset \{s, b, a, e, g, i, c\}$
- 4 $\emptyset \subset \{a\}$
- 5 $\{a, \{a\}\} \subseteq \{a, b, \{a\}\}$
- 6 $\{a\} \not\subseteq \{\{a\}\}$
- 7 $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a\}$
- 8 $\emptyset \subseteq A$ für beliebige Mengen A
- 9 aber: $\{\emptyset\} \not\subseteq \{a\}$

Teilmengen

Merke:

Die Element-von-Relation und die Teilmengen-Relation sind streng zu unterscheiden!

z.B.

$$a \in \{a\}$$

$$a \not\subseteq \{a\}$$

oder

$$\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$$

$$\{a\} \not\subseteq \{a, b, c\}$$

Teilmengen

Merke:

Teilmengen-Relation ist transitiv:

Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$.

Mengentheoretische Operationen: Potenzmenge

- $\wp(A)$ (auch geschrieben als $POW(A)$, $Pot(A)$ oder 2^A):
Potenzmenge von A
- Menge aller Teilmengen von A
- Beispiele:
 - 1 $\wp(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
 - 2 $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 - 3 $\wp(\wp(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - 4 $\wp(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- Wenn A endlich ist und n Elemente hat, dann hat $\wp(A)$ immer 2^n Elemente.
- Für alle Mengen A : $\emptyset \in \wp(A)$ und $A \in \wp(A)$.

Kardinalität von Mengen

- $|A|$ (auch geschrieben als $\#(A)$): Kardinalität (oder Mächtigkeit) von A
- für endliche Mengen: $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Beispiele:
 - ① $|\emptyset| = 0$
 - ② $|\{a\}| = 1$
 - ③ $|\{\emptyset\}| = 1$
 - ④ $|\{a, \{b, c, d\}\}| = 2$
- Kardinalität ist auch für unendliche Mengen definiert
- $|A| = |B|$ gdw. es eine eindeutige Abbildung zwischen A und B gibt (der Begriff der eindeutigen Abbildung wird später im Kurs noch erläutert).
- Nicht alle unendlichen Mengen haben die selbe Kardinalität.

Mengentheoretische Gesetze

1 Idempotenz-Gesetze:

1 $A \cup A = A$

2 $A \cap A = A$

2 Kommutativitäts-Gesetze:

1 $A \cup B = B \cup A$

2 $A \cap B = B \cap A$

3 Assoziativitäts-Gesetze:

1 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4 Distributivitäts-Gesetze:

1 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Mengentheoretische Gesetze

1 Identitäts-Gesetze:

- 1 $A \cup \emptyset = A$
- 2 $A \cup U = U$
- 3 $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 4 $A \cap U = A$

2 Komplement-Gesetze:

- 1 $A \cup A' = U$
- 2 $(A')' = A$
- 3 $A \cap A' = \emptyset$
- 4 $A - B = A \cap B'$

3 De Morgansche Gesetze:

- 1 $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- 2 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4 Konsistenz-Prinzipien:

- 1 $A \subseteq B$ gdw. $A \cup B = B$
- 2 $A \subseteq B$ gdw. $A \cap B = A$