Formale Methoden 1

Gerhard Jäger
Gerhard.Jaeger@uni-bielefeld.de

Uni Bielefeld, WS 2007/2008

7. November 2007

Geordnete Paare

- Mengen sind ungeordnet: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- für viele Anwendungen braucht man geordnete Strukturen
- einfachstes Beispiel: geordnete Paar $\langle a, b\rangle$
  - geordnet:

    Wenn $a \neq b$, dann $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$.

  - extensional:

    $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$ genau dann wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.

Mengentheoretische Definition

$$\langle a, b\rangle \doteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Geordnete Paare und Tupel

- mengentheoretische Definition erfüllt ihren Zweck, denn:
  - Wenn $a \neq b$, dann $\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{a\},\{a,b\}\}$.
  - $\{\{a_1\},\{a_1,b_1\}\} = \{\{a_2\},\{a_2,b_2\}\}$ genau dann wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.
- geordnete n-Tupel können rekursiv als geordnete Paare definiert werden:

$$\begin{aligned}
\langle a,b,c\rangle &\doteq \langle\langle a,b\rangle,c\rangle \\
\langle a,b,c,d\rangle &\doteq \langle\langle a,b,c\rangle,d\rangle \\
&\vdots \\
\langle a_1,\ldots,a_n\rangle &= \langle\langle a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle
\end{aligned}$$

Das Cartesische Produkt

- Cartesisches Produkt:
  - Operation zwischen zwei Mengen
  - Notation: $A \times B$
  - Menge aller geordneten Paare, bei denen das erste Element aus A kommt und das zweite Element aus B:

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle | a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das Cartesische Produkt

- Beispiele:
  - Sei $K = \{a, b, c\}$ und $L = \{1, 2\}$.

$$
\begin{aligned}
K \times L &= \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\} \\
L \times K &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\} \\
K \times K &= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \\
&\quad \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\} \\
L \times L &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\} \\
K \times \emptyset &= \emptyset \\
L \times \emptyset &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Beobachtung: Wenn A und B endlich sind, dann gilt:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Das Cartesische Produkt

- Cartesisches Produkt zwischen mehr als zwei Mengen:
  - $A \times B \times C \doteq (A \times B) \times C$
  - analog für mehr als drei Mengen
  - $A \times B \times C$ ist die Menge aller Tripel („3-Tupel"), so dass die erste Komponente eine Element von A ist, die zweite ein Element von B, und die dritte ein Element von C
  - gilt wiederum sinngemäß auch für mehr als drei Mengen
- Notationen:
  - $\Pi_{1 \leq i \leq n} A_i \doteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ (nicht mit den Projektionen verwechseln!)
  - $A^n \doteq \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}$

Projektionen

- Projektions-Operationen bilden ein geordnetes Paar auf eine seiner Komponenten ab:

$$\begin{aligned} \pi_0(\langle a, b\rangle) &\doteq a \\ \pi_1(\langle a, b\rangle) &\doteq b \end{aligned}$$

- Außerdem Projektionen von Mengen von geordneten Paaren aus die Menge der ersten bzw. zweiten Elemente:

$$\begin{aligned} \Pi_0(R) &\doteq \{x | \text{Es gibt ein } a \in R \text{ so dass } \pi_0(a) = x\} \\ \Pi_1(R) &\doteq \{x | \text{Es gibt ein } a \in R \text{ so dass } \pi_1(a) = x\} \end{aligned}$$

Relationen

- Intuitiv:
  - Eine (binäre) Relation ist eine Beziehung zwischen zwei Objekten.
  - Kann durch transitive Verben oder Konstruktionen wie *[Nomen] von/ [Adjektiv im Komparativ] als* ausgedrückt werden
  - Beispiele:
    - Mutter von
    - größer als
    - Vorgänger von
    - liebt
    - interessiert sich für
    - ...

Relationen

- mathematische Modellierung: **extensional**
- Wichtig ist nur, welche Objekte in der fraglichen Relation stehen; nicht, wie die Relation charakterisiert ist.
- Z.B.: Wenn jeder Mensch (im Diskursuniversum) seinen Ehepartner liebt und niemand jemanden anderen liebt als seinen Ehepartner, dann gelten „liebt“ und „ist Ehepartner von“ als die selbe Relation.

Relationen

- Notation:
  - Relationen werden häufig notiert als $R, S, T, \ldots$
  - „a steht in Relation R zu b“ wird geschrieben als $R(a, b)$, oder Rab oder aRb.
- Eine Relation ist eine Menge von geordneten Paaren.

Definition

R ist eine Relation gdw. es Mengen A und B gibt so dass $R \subseteq A \times B$.

Die Notation Rab ($R(a, b), aRb$) steht also für $\langle a, b\rangle \in R$.

Relationen

Sei $R \subseteq A \times B$.

- R ist eine Relation zwischen A und B.
- $\Pi_0(R) \subseteq A$
- $\Pi_1(R) \subseteq B$
- $\Pi_0(R)$ ist der Definitionsbereich von R (engl.: *Domain*)
- $\Pi_1(R)$ ist der Wertebereich von R (engl.: *Range*)

R ist eine Menge, also sind auch mengentheoretische Operationen definiert. Z.B.:

$$R' = A \times B - R$$

Inverse Relation

Sei $R \subseteq A \times B$.

- R^{-1} ist die inverse Relation zu R.
- Rab gdw. $R^{-1}ba$
- $R^{-1} \doteq \{\langle a, b\rangle \in B \times A | \langle b, a\rangle \in R\}$
- $\Pi_0(R) = \Pi_1(R^{-1})$
- $\Pi_1(R) = \Pi_0(R^{-1})$

Beispiel:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{a, b, c\}$
- $R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle\}$
- $\Pi_0(R) = \{1, 2\} \subseteq A$
- $\Pi_1(R) = \{a, c\} \subseteq B$
- $R' = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
- $R^{-1} = \{\langle a, 1\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$

Relationen

- Relationsbegriff kann auf mehrstellige Beziehungen erweitert werden
- Beispiele für dreistellige Relationen: „zwischen“, „Eltern von“, ...
- Formal: eine n-stellige Relation ist eine Mengen von n-Tupeln.
- $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

Funktionen

- Funktion: besondere Art Relation
- $f \subseteq A \times B$ ist eine Funktion genau dann wenn jedem Element von A genau ein Element von B zugeordnet ist

Beispiel:

- $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Funktionen:

$$\begin{aligned} P &= \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\} \\ Q &= \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 1\rangle\} \\ R &= \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\} \end{aligned}$$

- keine Funktionen:

$$\begin{aligned} S &= \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\} \\ T &= \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle c, 1\rangle\} \\ V &= \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle\} \end{aligned}$$

Funktionen

- Notation und Begrifflichkeit:
  - für Funktionen werden häufig die Buchstaben f, g, F, G, H usw. verwendet
  - $f : A \mapsto B$ steht für „f ist eine Funktion und $f \subseteq A \times B$“
  - $f(a) = b$ steht für „$\langle a, b \rangle \in f$“
  - Elemente des Definitionsbereichs heißen Argumente der Funktion.
  - Elemente des Wertebereichs heißen Werte der Funktion.
  - F heißt surjektiv gdw. jedes Element von B mindestens einem Argument zugeordnet ist, also $\Pi_1(F) = B$.
  - F heißt injektiv (oder „eineindeutig“) gdw. jedes Element von B maximal einem Argument zugeordnet ist.
  - F heißt bijektiv (oder „umkehrbar“), wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Die Funktion F ist bijektiv genau dann wenn F^{-1} auch eine Funktion ist. F^{-1} heißt dann die zu F inverse Funktion.

Funktionen

- Funktionen werden häufig als über eine Regel definiert, die es erlaubt, aus jedem Argument den zugehörigen Wert zu gewinnen.
- Beispiele:
  - $f(x) = x + 2$
  - $g(x) = x^2$
  - $h(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- Um zu wissen, um welche Funktion es sich dabei jeweils handelt, muss der Definitions- und Wertebereich bekannt sein.
- Frage: Unter welchen Bedingungen definieren die genannten Regeln injektive, surjektive bzw. bijektive Funktionen?

Mehrstellige Funktionen

- Definitionsbereich einer Funktion kann selber eine Relation sein
- Beispiel:
  - $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$
  - $F : A \times B \mapsto C$
  - $F = \{\langle 1, a, \alpha\rangle, \langle 1, b, \alpha\rangle, \langle 2, a, \beta\rangle, \langle 2, b, \alpha\rangle\}$
- Statt $F(\langle 1, a\rangle)$ usw. schreibt man auch $F(1, a)$ usw.
- Wenn der Definitionsbereich einer Funktion eine n-stellige Relation ist, spricht man von einer n-stelligen Funktion.
- Merke: n-stellige Funktionen sind $n + 1$-stellige Relationen!