Formale Methoden 1

Gerhard Jäger
Gerhard.Jaeger@uni-bielefeld.de

Uni Bielefeld, WS 2007/2008

14. November 2007

Komposition von Relationen und Funktionen

- seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen
- neue Relation $S \circ R \subseteq A \times C$ wird gebildet durch

$$S \circ R \doteq \{\langle x, y\rangle | \text{es gibt ein } z \text{ mit } R(x, z) \text{ und } S(z, y)\}$$

- Wenn R und S Funktionen sind, ist $S \circ R$ auch eine Funktion.

Die Identitätsfunktion

- Funktion $F : A \mapsto A$ heißt **Identitätsfunktion** gdw.

$$F = \{\langle x, x\rangle \in A \times A | x \in A\}$$

- Notation: $F = id_A$
- Komposition einer Relation R mit einer Identitätsfunktion mit dem richtigen Definitionsbereich ergibt wieder R:
  - Wenn $R \subseteq A \times B$, dann
    - $id_B \circ R = R$
    - $R \circ id_A = R$
- Wenn $F : A \mapsto B$ ein injektive Funktion ist, dann:
  - $F \circ F^{-1} \subseteq id_B$
  - $F^{-1} \circ F = id_A$
- Allgemein gilt:
  - $id_{\Pi_0(R)} \subseteq R^{-1} \circ R$
  - $id_{\Pi_1(R)} \subseteq R \circ R^{-1}$

Eigenschaften von Relationen

Viele Relationen, die in linguistischen Anwendungen auftreten, haben bestimmte strukturelle Eigenschaften. Die wichtigsten seien kurz vorgestellt; sie gelten für Relationen über einen bestimmten Gegenstandsbereich, also $R \subseteq A \times A$.

Reflexivität

$R \subseteq A \times A$ ist **reflexiv** gdw. für alle $x \in A$ gilt dass $R(x, x)$.

Beispiel

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

R_1 ist reflexiv, R_2 jedoch nicht (weil $\langle 3, 3\rangle \notin R_2$).

$R \subseteq A \times A$ ist reflexiv gdw. $id_A \subseteq R$.

Weitere Beispiele:

- „endet auf die selbe Ziffer wie"
- „hat am selben Tag Geburtstag wie"
- „größer oder gleich"

Irreflexivität

- Relation, die nicht reflexiv ist, heißt **non-reflexiv**.
- Relation, die **nie** ein Objekt mit sich selbst verbindet, heißt **irreflexiv**

Irreflexivität

R ist irreflexiv gdw. es kein Objekt x gibt mit $R(x, x)$.

In anderen Worten: R ist irreflexiv gdw. $R \cap id_A = \emptyset$.

Beispiele

- $R_3 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$
- $R_4 = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a < b\}$

Symmetrie

Eine Relation R ist **symmetrisch** gdw. für alle x, y mit $R(x, y)$ gilt, dass $R(y, x)$.

I.a.W.: R ist symmetrisch gdw. $R = R^{-1}$.

Beispiele

- „verheiratet mit“
- „teilerfremd“
- „geschah im selben Jahr wie“
- „Cousin oder Cousine von“
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$
- $\{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$
- $\{\langle 2, 2\rangle\}$

Asymmetrie

Asymmetrie

Eine Relation R ist **asymmetrisch** gdw. niemals sowohl $R(x, y)$ als auch $R(y, x)$.

- Jede asymmetrische Relation muss irreflexiv sein.
- Beispiele:
  - $\{\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$
  - $\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$
  - $\{\langle 1, 2\rangle\}$

Anti-Symmetrie

Anti-Symmetrie

Eine Relation R ist **anti-symmetrisch** gdw. immer dann, wenn sowohl $R(x,y)$ als auch $R(y,x)$, gilt, dass $x = y$.

- R muss nicht reflexiv sein, wenn es anti-symmetrisch ist!
- Jede asymmetrische Relation ist auch anti-symmetrisch.
- Wenn R anti-symmetrisch ist, dann ist $R - id_A$ asymmetrisch.

Anti-Symmetrie

Beispiele für anti-symmetrische Relation

- „größer als oder gleich“
- „ist teilbar durch“
- „ist Teilmenge von“
- $\{\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

Transitivität

Eine Relation R ist **transitiv** gdw. immer dann, wenn $R(x, y)$ und $R(y, z)$, auch gilt, dass $R(x, z)$.

- Beispiele:
  - „älter als“
  - „reicher als“
  - „größer als“
  - „Vorfahre von“
  - Gleichheit
  - $\{\langle 2, 2\rangle\}$
  - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$
  - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
  - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
- R ist transitiv genau dann wenn $R \circ R \subseteq R$.

Trichotomie

Trichotomie

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist **trichotomisch** (eng. *connected*) gdw. für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ gilt: $R(x, y)$ oder $R(y, x)$ (oder beides).

Der Name erklärt sich daraus, dass für jedes Paar von Objekten x, y im Definitionsbereich gilt: $R(x, y)$ oder $x = y$ oder $R(y, x)$.

Beispiele

- „größer als“ (bezogen auf die natürlichen Zahlen)
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$
- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

Eigenschaften der Inversen und des Komplements

$R\ (\neq \emptyset)$	R^{-1}	R'
reflexiv	reflexiv	irreflexiv
irreflexiv	irreflexiv	reflexiv
symmetrisch	symmetrisch	symmetrisch
asymmetrisch	asymmetrisch	nicht symmetrisch
anti-symmetrisch	anti-symmetrisch	hängt von R ab
transitiv	transitiv	hängt von R ab
trichotomisch	trichotomisch	hängt von R ab

Äquivalenz-Relationen und Partitionen

Äquivalenz-Relationen

Eine Relation R ist eine **Äquivalenz-Relation** gdw. R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

- Beispiele:
  - Gleichheit
  - „hat die selbe Haarfarbe wie"
  - „hat das selbe Alter wie"
  - „lässt bei der Division durch 10 den selben Teiler"
- Notation:

$$[\![a]\!]_R \doteq \{x|R(a,x)\}$$

- $[\![a]\!]_R$ ist die Menge aller Objekte, die von a aus durch R erreichbar sind.

Äquivalenz-Relationen und Partitionen

Partition

Sei A eine Menge. Die Menge $P \subseteq \wp(A)$ ist eine **Partition von** A gdw.

- $\bigcup P = A$, und
- für alle $X, Y \in P$ mit $X \neq Y$: $X \cap Y = \emptyset$.

- Beispiele: Sei $A = \{a, b, c, d, e\}$
- Folgende Mengen sind Partitionen von A:
  - $P_1 = \{\{a, c, d\}, \{b, e\}\}$
  - $P_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$
  - $P_3 = \{\{a, b, c, d, e\}\}$
- folgende Mengen sind keine Partitionen von A:
  - $C = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}, \{e\}\}$
  - $D = \{\{a\}, \{b, e\}, \{c\}\}$

Äquivalenz-Relationen und Partitionen

Zwischen Äquivalenz-Relationen und Partitionen gibt es einen enge Korrespondenz.

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenz-Relation. Dann ist die folgende Menge eine Partition von $\Pi_0(R)$:

  $$P_R = \{x \in \wp(A) | \text{es gibt ein } y \in A \text{ so dass } x = [\![y]\!]_R\}$$

- Sei P eine Partition von A. Dann ist die folgende Relation eine Äquivalenz-Relation:

  $$R_P = \{\langle x, y\rangle \in A \times A | \text{es gibt ein } X \in P \text{ mit } x \in X \text{ und } y \in X\}$$

  (Statt $R_P(a, b)$ schreibt man auch $a \equiv_P b$.)

Äquivalenz-Relationen und Partitionen

- Beispiel:
  - $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} R \;=\; & \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \\ & \langle 4,2\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 2,5\rangle\} \end{aligned}$$

  - Die zugehörige Partition ist:

$$P_R = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$$

- Aufgabe: Sei

$$\begin{aligned} R \;=\; & \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,5\rangle \\ & \langle 5,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 4,4\rangle\} \end{aligned}$$

Was ist die zugehörige Partition P_R?