Formale Methoden 1

Gerhard Jäger
Gerhard.Jaeger@uni-bielefeld.de

Uni Bielefeld, WS 2007/2008

21. November 2007

Ordnungen

- Unterscheidung *starke* vs. *schwache Ordnung*

Schwache Ordnung

Eine Relation R ist ein **schwache Ordnung** gdw. R

- transitiv,
- reflexiv, und
- anti-symmetrisch

ist.

Starke Ordnung

Eine Relation R ist ein **starke Ordnung** gdw. R

- transitiv,
- irreflexiv, und
- asymmetrisch

ist.

Beispiele:

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$
- $R_3 = \{\langle d, c\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle b, a\rangle\}$

korrespondierende starke Ordnungen:

- $S_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle\}$
- $S_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$
- $S_3 = \{\langle d, c\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

Ordnungen

Eine schwache Ordnung $R \subseteq A$ und eine starke Ordnung S korrespondieren zueinander gdw.

$$R = S \cup id_A$$

- weitere Beispiele:
  - $\leq$ / $<\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $\subseteq$ / $\subset\in \wp(A) \times \wp(A)$

Terminologie

Sei R eine Ordnung (stark oder schwach).

- a ist ein *Vorgänger* von b gdw. $R(a, b)$.
- a ist ein *Nachfolger* von b gdw. $R(b, a)$.
- a ist ein *unmittelbarer Vorgänger* von b gdw.
  - $a \neq b$,
  - $R(a, b)$, und
  - es gibt kein $c \notin \{a, b\}$ so dass $R(a, c)$ und $R(c, b)$.
- a ist ein *unmittelbarer Nachfolger* von b gdw. b ein unmittelbarer Vorgänger von a ist.

Mehr Terminologie

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Ordnung (stark oder schwach).

- Ein Element $x \in A$ ist *minimal* gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Vorgänger von x ist.
- Ein Element $x \in A$ ist das *Infimum* gdw. x der Vorgänger von allen anderen Elementen von A ist.
- Ein Element $x \in A$ ist *maximal* gdw. es kein $y \neq x$ gibt, das Nachfolger von x ist.
- Ein Element $x \in A$ ist das *Supremum* gdw. x der Nachfolger von allen anderen Elementen von A ist.

Eine Ordnung hat höchstens ein Infimum und höchstens ein Supremum, kann aber beliebig viele minimale oder maximale Elemente haben. Das Infimum ist immer minimal und das Supremum ist immer maximal.

Lineare Ordnung

Eine Ordnung ist **linear** (oder **total**) gdw. sie trichotomisch ist.

Wenn eine Ordnung R nicht linear ist, gibt es zwei Elemente a und b, so dass weder $R(a, b)$ noch $R(b, a)$. Die Ordnung ist also nicht vollständig, sondern partiell.
Üblicherweise (und irreführenderweise) wird der Begriff der *partiellen Ordnung* gleichbedeutend mit dem Begriff *Ordnung* verwendet.

Ordnungen

- weitere Arten von Ordnungen:
  - Eine Ordnung $R \subseteq A \times A$ ist *fundiert* gdw. jede Einschränkung von $R \cap (B \times B)$ auf eine Teilmenge $B \subseteq A$ ein minimales Element enthält. Äquivalent kann man sagen: In einer fundierten Ordnung gibt es keine unendlich absteigenden Äste.
  - Eine Ordnung $R \subseteq A \times A$ ist *dicht* gdw. es für beliebige Elemente x und y mit $R(x, y)$ ein von x und y verschiedenes Element z gibt mit $R(x, z)$ und $R(z, y)$.