Formale Methoden 1

Probeklausur

19. Dezember 2007

1. *(6 Punkte)* Geben Sie jeweilse $A \cap B$, $A \cup B$ und $A - B$ an.

   (a) $A = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   (b) $A = \{x|x \text{ ist eine gerade Zahl}\}, B = \{x|x \text{ ist eine Primzahl}\}$

   (a)

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, 2, 3\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ A - B &= \{6, 7\} \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2\} \\ A \cup B &= \{x \in N | x \text{ ist gerade oder eine Primzahl}\} \\ A - B &= \{x \in N | x > 2 \text{ und } x \text{ ist gerade}\} \end{aligned}$$

2. *(4 Punkte)* Für eine beliebige Menge S:

   (a) ist S ein Element von $\{S\}$? ja

   (b) ist $\{S\}$ ein Element von $\{S\}$? nein

   (c) ist $\{S\}$ eine Teilmenge von $\{S\}$? ja

   (d) was ist die Menge, deren einziges Element $\{S\}$ ist? $\{\{S\}\}$

3. *(2 Punkte)* Geben Sie die folgenden Mengen in Listennotation an:

(a) $\wp(\{a, b\})$
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

(b) $\wp(\{a, \{a\}\})$
$\{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$

4. *(6 Punkte)* Sei $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, und $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$.

   (a) Was ist R' und R^{-1}?

$$\begin{aligned} R' &= \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\} \\ R^{-1} &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} \end{aligned}$$

   (b) Ist R eine Funktion? ja

   (c) Wenn ja, ist R injektiv, surjektiv, bzw. bijektiv? weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv

5. *(6 Punkte, je ein Punkt für die richtige Antwort, einer für die korrekte Partition in (a), und einer für das "'stark"' in (d).)* Sei $A = \{1, 2, 3\}, R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$, und $S = \{\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

   (a) Ist R eine Äquivalenzrelation? Wenn ja, geben Sie die zugehörige Partition an.
   R ist eine Äquivalenzrelation. $P_R = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

   (b) Ist S eine Äquivalenzrelation? Wenn ja, geben Sie die zugehörige Partition an.
   S ist keine Äquivalenzrelation.

   (c) Ist R eine Ordnungsrelation? Wenn ja, ist es eine starke oder eine schwache Ordnung?
   R ist eine schwache Ordnungsrelation.

   (d) Ist S eine Ordnungsrelation? Wenn ja, ist es eine starke oder eine schwache Ordnung?
   S ist eine starke Ordnungsrelation.

6. Sei $A = abab$ eine Kette über das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) *(2 Punkte, einer für die nicht-leeren Teilketten und einer für die leere Kette)* Gib alle Teilketten von A an.
$\epsilon, a, b, ab, ba, aba, bab, abab$

(b) *(3 Punkte)*Betrachte die Relation

$$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \text{ sind Teilketten von } A \text{ und } x \text{ ist eine Teilkette von } y\}$$

Ist R eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation? Wenn es eine Ordnungsrelation ist, was sind minimale und maximale Elemente?
Es handelt sich um eine schwache Ordnung. Minimales Element ist ϵ, maximales Element ist $abab$.

7. *(3 Punkte)* Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = \langle V_T, V_N, S, R\rangle$:

$$\begin{aligned} V_T &= \{a, b\} \\ V_N &= \{S, T\} \\ R &= \{S \to aS, S \to T, T \to bT, T \to b\} \end{aligned}$$

(a) Welchen Typ hat diese Grammatik entsprechend der Chomsky-Hierarchie?
Typ 3

(b) Welche Sprache wird durch diese Grammatik generiert?
$\{a^n b^m | n \geq 0, m > 0\}$

(c) Geben Sie für eine Kette, die von G generiert wird und die mindestens die Länge 4 hat, den Ableitungsbaum an.